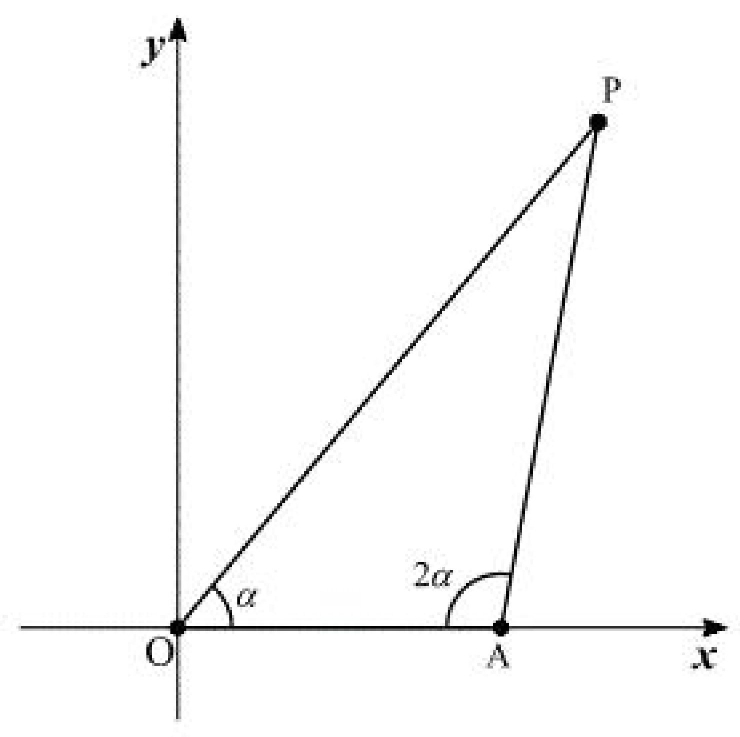
1

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	9	−1	3	−3	3	−1	3
(2)	ク	ケ	コ	サ			
	1	2	1	2			
(3)	シ	ス					
	1	2					

〔解説〕

(1)



点 P の座標を(X, Y)とおくと，その y 座標が正であることから$Y>0$である。よって，上の図のように$\angle\mathrm{POA}=\alpha\ (0 \leqq \alpha \leqq \pi)$とおくと，$\angle\mathrm{PAO}=2\angle\mathrm{POA}=2\alpha$である。このとき，$\triangle\mathrm{AOP}$について，その内角の和は$\pi$だから，

$$\begin{aligned}&\angle\mathrm{PAO}+\angle\mathrm{POA}+\angle\mathrm{APO}=\pi\\ &\Rightarrow \alpha+2\alpha<\pi\ (\because \angle\mathrm{APO}>0)\\ &\Leftrightarrow \alpha<\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

である。これと$Y>0$より，点 P は第一象限にある。よって，$X>0$である。

[1] $X \neq 1$のとき

これと$X>0$より，

$$\tan\alpha=\tan\angle\mathrm{POA}=\frac{Y}{X}$$
$$\tan 2\alpha=\tan\angle\mathrm{PAO}=\frac{Y}{1-X}$$

である。ここで，$\tan^2\alpha=1$すなわち$\tan\alpha=\pm1$と仮定すると，$0 \leqq \alpha<\frac{\pi}{3}$より，$\alpha=\frac{\pi}{4}$となるから，$2\alpha=\frac{\pi}{2}$となり，$\tan 2\alpha$は定義されない。これは，$X \neq 1$より，$\tan 2\alpha=\frac{Y}{1-X}$となることと矛盾する。よって，$\tan^2\alpha \neq 1$となる。したがって，2 倍角の公式より，

$$\begin{aligned}&\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\\ &\Leftrightarrow \tan 2\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)=2\tan\alpha\\ &\Leftrightarrow \frac{Y}{1-X}\left\{1-\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right\}=2\cdot\frac{Y}{X}\\ &\Leftrightarrow \frac{Y}{1-X}\cdot\frac{X^2-Y^2}{X^2}=\frac{2Y}{X}\ (\because Y \neq 0)\\ &\Leftrightarrow X^2-Y^2=2X(1-X)\\ &\Leftrightarrow 3X^2-2X-Y^2=0 \qquad \cdots ①\\ &\Leftrightarrow 3\left(X-\frac{1}{3}\right)^2-Y^2=\frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow 9\left(X-\frac{1}{3}\right)^2-3Y^2=1 \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

となる。よって，点 P のとり得る範囲は$9\left(X-\frac{1}{3}\right)^2-3Y^2=1$の$0<X<1, 1<X$の部分である。

[2] $X=1$のとき

$\angle\mathrm{PAO}=\frac{\pi}{2}$より，$\angle\mathrm{POA}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{PAO}=\frac{\pi}{4}$である。よって，$\triangle\mathrm{OAP}$は$\angle\mathrm{PAO}=\frac{\pi}{2}, \mathrm{OA}=1$の直角二等辺三角形である。よって，$(X, Y)=(1, 1)$であり，これは②を満たす。

以上[1], [2]より，点 P の軌跡は曲線

$$9\left(x+\frac{-1}{3}\right)^2+(-3)y^2=1$$

の第一象限の部分と一致する。また，これは双曲線

$$\begin{aligned}&9x^2-3y^2=1\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1\end{aligned}$$

の第一象限の部分を x 軸方向に$+\frac{1}{3}$だけ平行移動したものである。ところで，双曲線$9x^2-3y^2=1$は直線

$$\begin{aligned}&\frac{y}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\pm\frac{x}{\left(\frac{1}{3}\right)}\\ &\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}x\end{aligned}$$

を漸近線にもつから，曲線$9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-3y^2=1$の第一象限の部分は，直線$y=\sqrt{3}x$を x 軸方向に$+\frac{1}{3}$だけ平行移動した直線

$$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\sqrt{3}\left(x+\frac{-1}{3}\right)$$

を漸近線にもつ。

(2)

線分 PH, AP の長さは，

$$\mathrm{PH}=|X-k|$$
$$\mathrm{AP}=\sqrt{(X-1)^2+Y^2}$$

である。$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AP}}$が一定の値であるとき，$\mathrm{PH}>0, \mathrm{AP}>0$よりある正の実数$c$を用いて，

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AP}}=c$$

と表せる。このとき，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AP}}=c\\ &\Leftrightarrow \mathrm{PH}^2=c^2\mathrm{AP}^2\\ &\Leftrightarrow (X-k)^2=c^2\left\{(X-1)^2+Y^2\right\}\end{aligned}$$

となる。ここで①より X, Y は$Y^2=3X^2-2X$を満たすので，

$$\begin{aligned}&(X-k)^2=c^2\left\{(X-1)^2+3X^2-2X\right\}\\ &\Leftrightarrow (X-k)^2=c^2\left(4X^2-4X+1\right)\\ &\Leftrightarrow (X-k)^2=4c^2\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \cdots ③\end{aligned}$$

となる。題意より$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AP}}=c$は常に成り立つので，③は恒等式である。両辺を比較して

$$\begin{cases}4c^2=1\\ k=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=\frac{1}{2}\ (\because c>0)\\ k=\frac{1}{2}\end{cases}$$

を得る。以上より，条件を満たすとき$k=\frac{1}{2}, \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AP}}=c=\frac{1}{2}$である。

(3)

$\angle\mathrm{PAO}=\theta$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(X-1, Y), \overrightarrow{\mathrm{AO}}=(-1, 0)$より，

$$\begin{aligned}&\cos\angle\mathrm{PAO}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|}\\ &\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{-(X-1)}{\mathrm{AP}}\\ &\Leftrightarrow X=1-\mathrm{AP}\cos\theta\end{aligned}$$

となる。また，①より$X>0, Y>0$に対して，

$$\begin{aligned}&9\left(X-\frac{1}{3}\right)^2=1+3Y^2>1\\ &\Leftrightarrow 3\left|X-\frac{1}{3}\right|>1\\ &\Leftrightarrow X>\frac{2}{3}\ (\because X>0)\end{aligned}$$

であるから，これと$k=\frac{1}{2}$より，$X>k$となる。よって，

$$\mathrm{PH}=X-\frac{1}{2}=1-\mathrm{AP}\cos\theta-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{AP}\cos\theta$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{AP}=2\mathrm{PH}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{AP}=2\left(\frac{1}{2}-\mathrm{AP}\cos\theta\right)\\ &\Leftrightarrow (1+2\cos\theta)\mathrm{AP}=1\\ &\therefore \mathrm{AP}=\frac{1}{1+2\cos\theta}\end{aligned}$$

を得る。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	セ	ソ			
	3	4			
(2)	タ	チ	ツ	テ	ト
	1	3	−1	2	2
(3)	ナ	ニ			
	5	7			
(4)	ヌ	ネ			
	5	89			

〔解説〕

(1)

2日目にA定食が提供される確率は$\frac{1}{2}$であり，このとき$\frac{1}{2}$の確率で3日目にA定食が提供される。また2日目にB定食が提供される確率は$\frac{1}{2}$であり，このとき3日目に必ずA定食が提供される。よって，求める確率は，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{4}$$

である。

(2)

n日目にA定食が提供される確率をP_nとする。$n \geqq 2$において，$(n-1)$日目にA定食が提供される確率はP_{n-1}であり，このとき$\frac{1}{2}$の確率でn日目にA定食が提供される。また$(n-1)$日目にB定食が提供される確率は$1-P_{n-1}$であり，このときn日目に必ずA定食が提供される。よって，

$$P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+(1-P_{n-1})$$
$$\Leftrightarrow P_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$$

であるから，$P_1=1$より，

$$P_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{2}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow P_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore P_n=\frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\right\}$$

である。

(3)

事象X, Yを

$$\begin{cases} X:「6日目にA定食が提供される」\\ Y:「3日目にA定食が提供される」\end{cases}$$

と定義する。(2)より事象Xの確率は，

$$\mathrm{P}(X)=P_6=\frac{21}{32}$$

である。また，事象$(X\cap Y)$は3日目と6日目にA定食が提供される事象である。これは

「3日目にA定食が提供される」

かつ「3日目にA定食が提供される条件の下で，6日目にA定食が提供される」

事象と同値である。ここで，1日目に必ずA定食が提供されることに注意すると，任意の自然数mについて，「n日目にA定食が提供される」確率と，「m日目にA定食が提供される条件の下で，$(m+n-1)$日目にA定食が提供される」確率は等しくなる。したがって，事象$(X\cap Y)$の確率は，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\cap Y)&=P_3\cdot P_{6-3+1}\\&=P_3\cdot P_4\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\\&=\frac{15}{32}\end{aligned}$$

である。よって，求める確率は

$$\mathrm{P}_X(Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{15}{32}}{\frac{21}{32}}=\frac{5}{7}$$

となる。

(4)

1日目からn日目までに提供される定食の可能な組合せのうち，n日目がB定食であるものの総数をb_nとおく。a_{n+1}はn日目がA定食であるものの総数a_nとB定食であるものの総数b_nの和で表される。またb_{n+1}はn日目がA定食であるものの総数a_nに等しい。よって，

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n\\ b_{n+1}=a_n\end{cases}$$

となる。したがって，

$$a_{n+2}=a_{n+1}+b_{n+1}=a_{n+1}+a_n$$

となる。$a_1=1, b_1=0$より，$a_2=a_1+b_1=1$となるから，

$$a_3=a_2+a_1=1+1=2$$
$$a_4=a_3+a_2=2+1=3$$
$$a_5=a_4+a_3=3+2=5$$

となる。また，1日目から10日目までで提供される定食の組み合わせの総数は，

$$a_{10}+b_{10}=a_{11}$$

となるから，

$$a_6=a_5+a_4=5+3=8$$
$$a_7=a_6+a_5=8+5=13$$
$$a_8=a_7+a_6=13+8=21$$
$$a_9=a_8+a_7=21+13=34$$
$$a_{10}=a_9+a_8=34+21=55$$
$$a_{11}=a_{10}+a_9=55+34=89$$

より，89である。

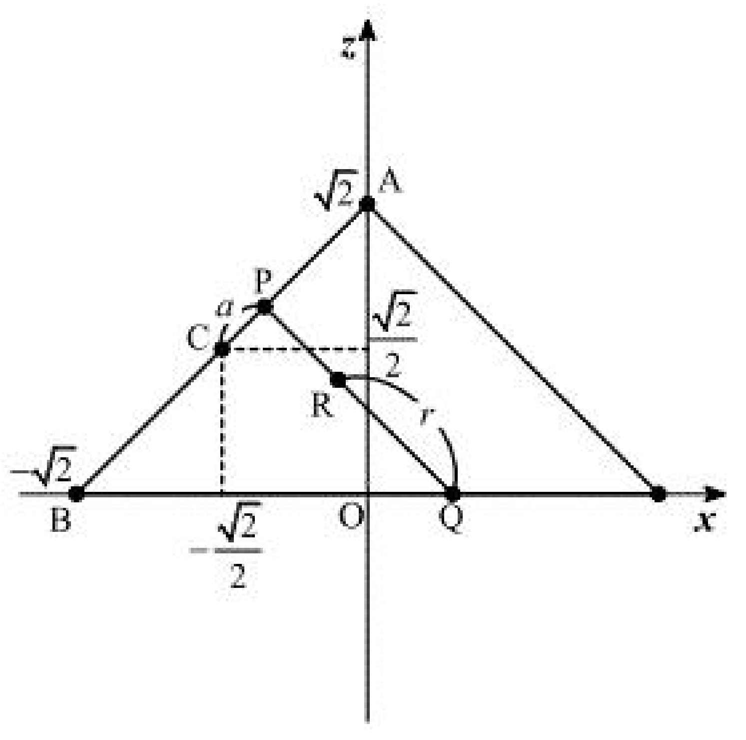
3

〔解答〕

(1)	ノ	ハ	ヒ		
	4	3	2		
(2)	フ	ヘ	ホ		
	1	2	6		
(3)	マ	ミ	ム	メ	モ
	4	9	2	2	3

〔解説〕

(1)



平面 $y=0$ で切断した切断面は上の図のようになる。点Cは線分ABの中点だから，その座標は $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。よって，$\mathrm{CA}=1$ であるから $0 \leqq a \leqq 1$ であり，点Pの座標は

$$\left(-\sqrt{2}\left(\frac{1-a}{2}\right),\ 0,\ \sqrt{2}\left(\frac{1+a}{2}\right)\right)$$

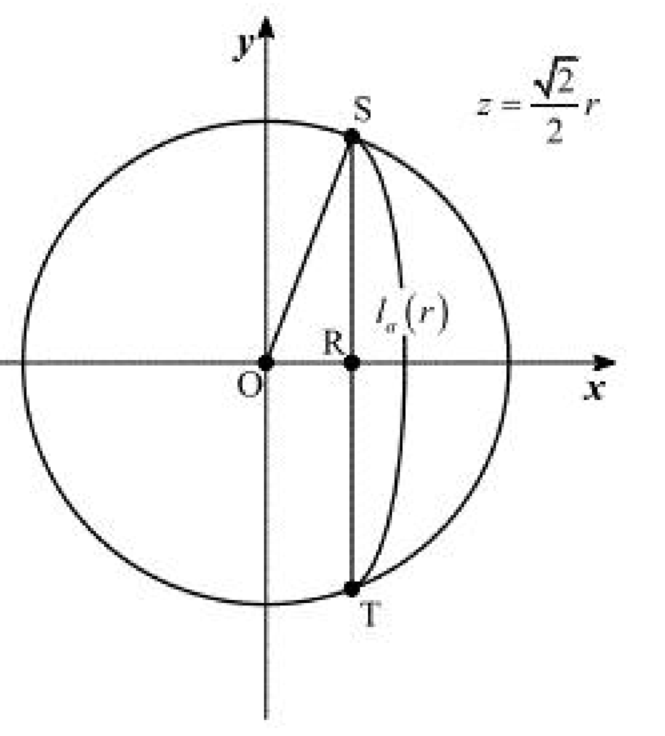
となる。点Pを通り線分ABと垂直に交わる平面と，x 軸の交点を点Qとすると，点Qの座標は

$$\left(\sqrt{2}a,\ 0,\ 0\right)$$

となる。また，線分PQ上を動く点Rをとり，$\mathrm{QR}=r$ とする。$\mathrm{PQ}=\mathrm{PB}=1+a$ より，$0 \leqq r \leqq 1+a$ である。点Rの座標は

$$\left(\sqrt{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}r,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$$

となる。



また，点Rを通り z 軸に垂直な平面で円錐を切断した切断面は上の図のようになる。点Rを通り y 軸と平行な直線と円錐の側面との交点をそれぞれS, Tとおき，$l_a(r)$ を線分STの長さとする。$\mathrm{OS}=\mathrm{OT}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}r$ となるから，三平方の定理より，

$$\begin{aligned} l_a(r) &= 2\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2-\left(\sqrt{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{1-a}\sqrt{1+a-r} \end{aligned}$$

となる。よって，

$$S(a)=\int_0^{1+a} l_a(r)\,dr$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} S(0) &= \int_0^1 l_0(r)\,dr \\ &= \int_0^1 2\sqrt{2}\sqrt{1-r}\,dr \\ &= 2\sqrt{2}\left[-\frac{2}{3}(1-r)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

(2)

(1)より，

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{1+a} 2\sqrt{2}\sqrt{1-a}\sqrt{1+a-r}\,dr \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{1-a}\left[-\frac{2}{3}(1+a-r)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1+a} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2}(1-a)^{\frac{1}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。これを微分すると，

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left\{-\frac{1}{2}(1-a)^{-\frac{1}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(1-a)^{\frac{1}{2}}(1+a)^{\frac{1}{2}}\right\} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}(1-a)^{-\frac{1}{2}}(1+a)^{\frac{1}{2}}(1-2a) \end{aligned}$$

となるから，$0 \leqq a \leqq 1$ より，$S'(a)=0$ となるのは $a=\frac{1}{2}$ のときである。よって，増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	最大	↘	

したがって，$a=\frac{1}{2}$ のとき，$S(a)$ は最大値

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

をとる。

(3)

求める体積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(a)\,da &= \int_0^1 \frac{4\sqrt{2}}{3}(1-a)^{\frac{1}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\,da \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{1-a^2}(1+a)\,da \end{aligned}$$

となる。ここで，$a=\sin\theta$ とおくと，$\frac{da}{d\theta}=\cos\theta$ であり，

a	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{2}$

であるから，

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(a)\,da &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}(1+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta(1+\sin\theta)\,d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\cos^2\theta(\cos\theta)'\right\}d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{9}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

4

〔解答〕

(1)	ヤ	ユ	ヨ	ラ
	1	2	1	2
(2)	リ	ル		
	2	2		
(3)	F			
(4)	レ	ロ		
	1	6		
(5)	ワ	ヲ		
	1	16		
(6)	ン			
	1			

〔解説〕

(1)

点 P の座標を (x, y) とすると，$\mathrm{PA}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$, $\mathrm{PB}=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$ となるから，

$$\begin{aligned}(\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB})^2&=\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\right)^2\\&=\left\{(x-a)^2+(y-a)^2\right\}\left\{(x+a)^2+(y+a)^2\right\}\\&=\left(x^2+y^2+2a^2-2ax-2ay\right)\left(x^2+y^2+2a^2+2ax+2ay\right)\\&=\left(x^2+y^2+2a^2\right)^2-(2ax+2ay)^2\\&=\left(x^2+y^2\right)^2+4a^2\left(x^2+y^2\right)+4a^4-\left\{4a^2\left(x^2+y^2\right)+8a^2xy\right\}\\&=\left(x^2+y^2\right)^2-8a^2xy+4a^4\\&=\left(2-8a^2\right)xy+4a^4\ \left(\because\left(x^2+y^2\right)^2=2xy\right)\end{aligned}$$

である。よって $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$ が x, y によらず一定となるのは，

$$\begin{aligned}&2-8a^2=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)\end{aligned}$$

のときであり，このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}&=\sqrt{4a^4}\ (\because \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}>0)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を曲線 C の式に代入すると，

$$\begin{aligned}&\left(x^2+y^2\right)^2=2xy\\&\Leftrightarrow\left(r^2\right)^2=2r^2\sin\theta\cos\theta\\&\Leftrightarrow r^2\left(r^2-\sin2\theta\right)=0\end{aligned}$$

となる。$r=0$ は原点であり，これは $r^2=\sin2\theta$ に含まれる。したがって，求める式は $r^2=\sin2\theta$ となる。

(3)

方程式 $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$ は，x, y を入れ替えた式と同値であるから，曲線 C は直線 $x=y$ について対称である。また，これは原点 $(0, 0)$ を通る。これらを満たす C の概形は，F である。

(4)

(2)の結果より，曲線 C の極方程式は $r^2=\sin2\theta$ と表されるから，この曲線が存在する範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ で考えると，

$$\begin{aligned}&r^2\geqq0\\&\Leftrightarrow\sin2\theta\geqq0\\&\Leftrightarrow 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ \pi\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

となる。$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $x\geqq0$ であり，$\pi\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ のとき $x\leqq0$ であるから，x 座標が最大である点を考えるとき，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で考えればよい。このとき $x\geqq0$ であるから，x^2 が最大となる θ の値を求めればよく，

$$\begin{aligned}&x=r\cos\theta\\&\Leftrightarrow x^2=r^2\cos^2\theta\\&\Leftrightarrow x^2=\sin2\theta\cos^2\theta\\&\Leftrightarrow x^2=2\sin\theta\cos^3\theta\end{aligned}$$

より，$f(\theta)=2\sin\theta\cos^3\theta$ として，これを微分すると，

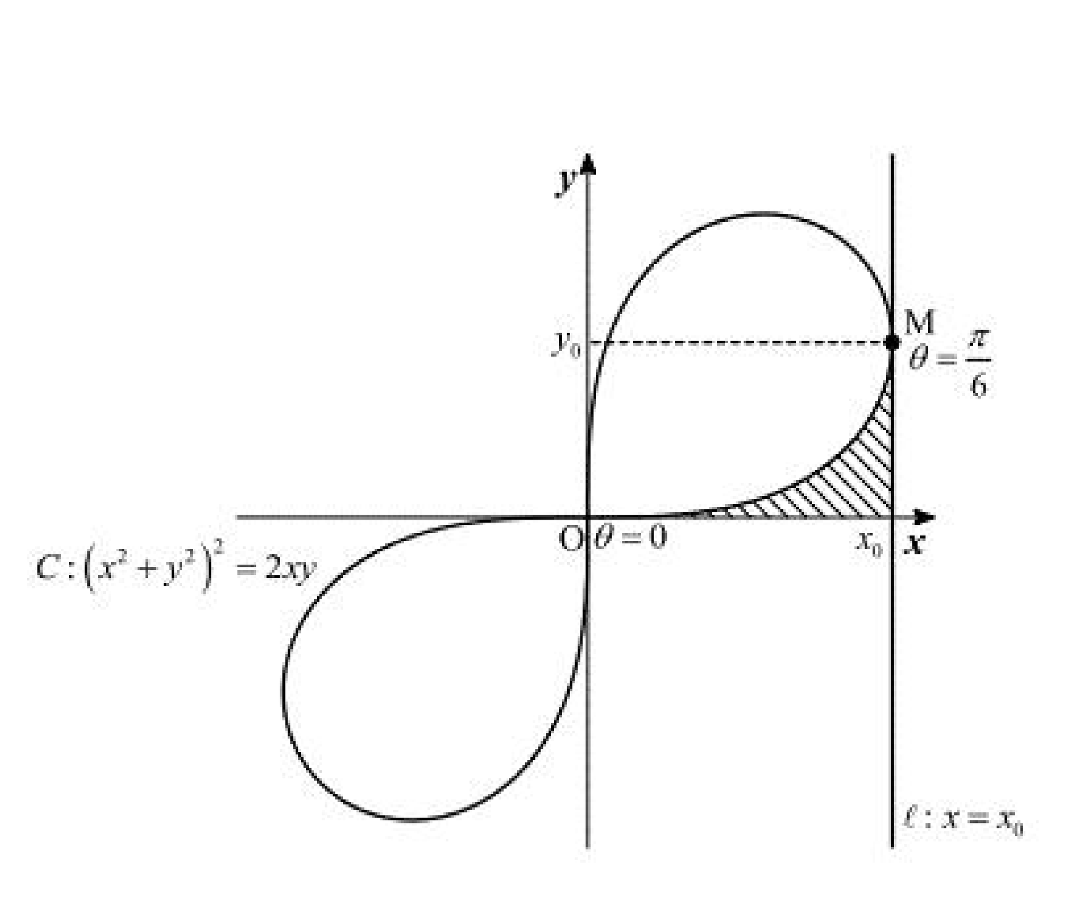
$$\begin{aligned}f'(\theta)&=2\cos^2\theta\left(\cos^2\theta-3\sin^2\theta\right)\\&=2\cos^2\theta\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)\left(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)\\&=8\cos^2\theta\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)\sin\left(\theta+\frac{1}{6}\pi\right)\end{aligned}$$

となる。よって，増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	最大	↘	

したがって，x 座標が最大となるのは，$\theta=\theta_0=\frac{\pi}{6}$ のときである。

(5)



点 M の座標を (x_0, y_0) とおく。上の図の斜線部のように，求めるのは曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ の部分と直線 $x=x_0$ と x 軸で囲まれた部分の面積である。これを S とすると $S=\int_0^{x_0}ydx$ である。

ここで，

$$\frac{dr^2}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(\sin2\theta)=2\cos2\theta\ \left(\because r^2=\sin2\theta\right)$$

より，積分定数を D とすると，

$$\begin{aligned}\int ydx&=\int r\sin\theta\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta\ (\because y=r\sin\theta)\\&=\int r\sin\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\cdot\cos\theta-r\sin\theta\right)d\theta\ (\because x=r\cos\theta)\\&=\int\left(\sin\theta\cos\theta\cdot r\cdot\frac{dr}{d\theta}-r^2\sin^2\theta\right)d\theta\\&=\int\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\cdot\frac{1}{2}\frac{dr^2}{d\theta}-r^2\sin^2\theta\right)d\theta\\&=\int\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\cos2\theta-\sin2\theta\sin^2\theta\right)d\theta\ \left(\because r^2=\sin2\theta\right)\\&=\int\left(\frac{1}{4}\sin4\theta-2\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta\\&=\int\left\{\frac{1}{4}\sin4\theta-2\sin^3\theta(\sin\theta)'\right\}d\theta\\&=-\frac{1}{16}\cos4\theta-\frac{1}{2}\sin^4\theta+D\end{aligned}$$

であり，

x	0	$\to$	x_0
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

となるから，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{x_0}ydx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4}\sin4\theta-2\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta\\&=\left[-\frac{1}{16}\cos4\theta-\frac{1}{2}\sin^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=\left\{-\frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right\}-\left(-\frac{1}{16}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot0\right)\\&=\frac{1}{16}\end{aligned}$$

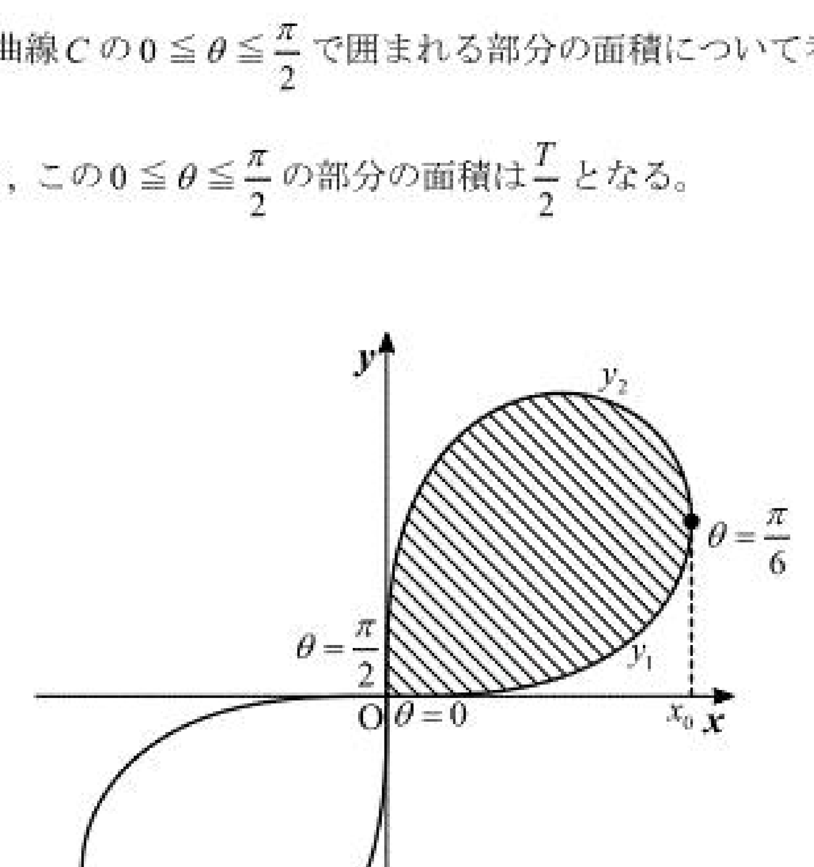
となる。

(6)

曲線 C の式の (x, y) に $(-x, -y)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}&\left\{(-x)^2+(-y)^2\right\}^2=2(-x)\cdot(-y)\\&\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2=2xy\end{aligned}$$

となるから，曲線 C は原点について点対称である。よって，下の図の斜線部のように，$x\geqq0$ の部分，すなわち，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積について考える。求める全体の面積を T とすると，この $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分の面積は $\frac{T}{2}$ となる。



曲線 C について，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ の部分を y_1，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分を y_2 とすると，

$$\frac{T}{2}=\int_0^{x_0}y_2dx-\int_0^{x_0}y_1dx$$

である。$\int_0^{x_0}y_2dx$ について，

x	0	$\to$	x_0
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

となるから，(5)と同様にして，

$$\begin{aligned}\int_0^{x_0}y_2dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{4}\sin4\theta-2\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta\\&=\left[-\frac{1}{16}\cos4\theta-\frac{1}{2}\sin^4\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\\&=\left\{-\frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right\}-\left(-\frac{1}{16}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot1\right)\\&=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

となる。これと(5)の結果より，

$$\begin{aligned}&\frac{T}{2}=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}\\&\therefore T=1\end{aligned}$$

となるので，求める面積は1となる。