1

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	−2	−6	1	5	−3	−9	9
(2)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)			
	B	G	A, D	F			

〔解説〕

(1)(i)

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ を辺々 x で微分すると，

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

である。また，傾きが $\frac{1}{3}$ である直線に垂直な直線の傾きは，-3 である。以上より，曲線 C が点 $(1,\ 0)$ を通り，かつその点における接線が直線 $y = \frac{1}{3}x + 1$ と垂直である為の必要十分条件は，

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (b,\ c) = (-2a - 6,\ a + 5)$$

である。

(ii)

$f(x)$ が $x = -1,\ 3$ で極値を取ることから，$f'(x)$ は0でない定数 α を用いて

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(x+1)(x-3) \\ &= \alpha(x^2 - 2x - 3) \end{aligned}$$

と表される。これを辺々積分すると，定数 β を用いて

$$f(x) = \alpha\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right) + \beta$$

となる。ここで，$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と比較すれば，$\alpha = 3,\ \beta = r$ であると分かる。つまり，

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + r$$

と表される。したがって，

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = -8$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + rx\right]_{-1}^{3} = -8$$
$$\Leftrightarrow 20 - 28 - 36 + 4r = -8$$
$$\Leftrightarrow r = 9$$

と求まる。以上より，

$$(p,\ q,\ r) = (-3,\ -9,\ 9)$$

である。

(2)(i)

p の否定は，箱の中に10以上のカードが存在しないことである。箱の中には1枚以上のカードが必ず存在することから，これは箱の中に入っているカードが全て10未満であることと同値である。これはBである。

(ii)

Bを除く全ての命題について，p の十分条件または必要条件となっているか調べる。

[1] Aについて

箱の中に1, 10が1枚ずつ入っているとき，p は成立するがAは成立しない。一方，箱の中には1枚以上のカードが必ず存在することから，Aが成立するとき必ず p が成立する。以上より，Aは p である為の十分条件であるが必要条件ではない。

[2] Cについて

箱の中に10が1枚入っているとき，p は成立するがCは成立しない。一方，箱の中に1が1枚入っているとき，Cは成立するが p は成立しない。以上より，Cは p である為の十分条件でも必要条件でもない。

[3] Dについて

箱の中に10が1枚入っているとき，p は成立するがDは成立しない。一方，Dが成立するとき，箱の中には12が存在するから, p が成立する。以上より，Dは p である為の十分条件であるが必要条件ではない。

[4] Eについて

箱の中に10が1枚入っているとき，p は成立するがEは成立しない。一方，箱の中に1が1枚入っているとき，Eは成立するが p は成立しない。以上より，Eは p である為の十分条件でも必要条件でもない。

[5] Fについて

箱の中に10が1枚入っているとき，p は成立するがFは成立しない。一方，箱の中に1が1枚入っているとき，Fは成立するが p は成立しない。以上より，Fは p である為の十分条件でも必要条件でもない。

[6] Gについて

p が成立するとき，箱の中には10以上の数が書かれたカードが存在し，箱の中のカードに書かれているすべての数の和はそれ以上であるから，Gが成立する。一方，箱の中に2が5枚入っているとき，Gは成立するが p は成立しない。以上より，Gは p である為の必要条件であるが十分条件ではない。

以上[1]~[6]より，p である為の必要条件はGのみである。

(iii)

(ii)における考察より，p である為の十分条件はA, Dである。

(iv)

以下では命題 q の否定を $\overline{q}$ のように書く。A, B, …, Gのうち $\overline{p}$ と同値なものはBのみであるから，それ以外の命題のうち $\overline{p}$ の十分条件であって必要条件でないものを解とすればよい。

[1] Aについて

箱の中に10が1枚入っているとき，Aは成立するが $\overline{p}$ は成立しない。したがって $\overline{p}$ の十分条件でないため不適である。

[2] Cについて

箱の中に1, 10が1枚ずつ入っているとき，Cは成立するが $\overline{p}$ は成立しない。したがって $\overline{p}$ の十分条件でないため不適である。

[3] Dについて

箱の中に12が1枚入っているとき，Dは成立するが $\overline{p}$ は成立しない。したがって $\overline{p}$ の十分条件でないため不適である。

[4] Eについて

箱の中に1, 10が1枚ずつ入っているとき，Eは成立するが $\overline{p}$ は成立しない。したがって $\overline{p}$ の十分条件でないため不適である。

[5] Fについて

p が成立するとき，箱の中には10以上の数が書かれたカードが存在し，箱の中のカードに書かれているすべての数の和はそれ以上であるから，$\overline{\mathrm{F}}$ が成立する。これより，$p \Rightarrow \overline{\mathrm{F}}$ が成立するから，対偶を考えれば，$\mathrm{F} \Rightarrow \overline{p}$ は真だと分かる。一方で，箱の中に2が5枚入っているとき，$\overline{p}$ は成立するがFは成立しない。つまり，$\overline{p} \Rightarrow \mathrm{F}$ は偽である。これは題意を満たす。

[6] Gについて

箱の中に10が1枚入っているとき，Gは成立するが $\overline{p}$ は成立しない。したがって $\overline{p}$ の十分条件でないため不適である。

以上[1]~[6]より，$\overline{p}$ である為の十分条件であるが必要条件ではないものは，Fのみである。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	クケ	コ	サ	シ	ス	セ	
	13	10	5	2	10	7	2

(1)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	13	10	5	2	10	7	2
(2)	ソ	タ	チ	ツ	テ		
	6	17	7	17	17		
(3)	ト	ナ					
	4	9					
(4)	ニ	ヌ					
	6	13					

〔解説〕

(1)

三平方の定理より,

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2}=\sqrt{13}$$
$$\mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AE}^2}=\sqrt{10}$$
$$\mathrm{CF}=\sqrt{\mathrm{BC}^2+\mathrm{BF}^2}=\sqrt{5}$$

である。したがって, △ACFにおいて余弦定理より,

$$\cos\angle\mathrm{AFC}=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{FC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

となる。ここで, $0°<\angle\mathrm{AFC}<180°$ だから $\sin\angle\mathrm{AFC}>0$ であることより,

$$\sin\angle\mathrm{AFC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AFC}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

と求まる。以上より,

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{FC}\cdot\sin\angle\mathrm{AFC}=\frac{7}{2}$$

である。

(2)

$$\mathrm{FR}=a\cdot\mathrm{FA}=a\sqrt{10}$$
$$\mathrm{FS}=(1-a)\mathrm{FC}=(1-a)\sqrt{5}$$

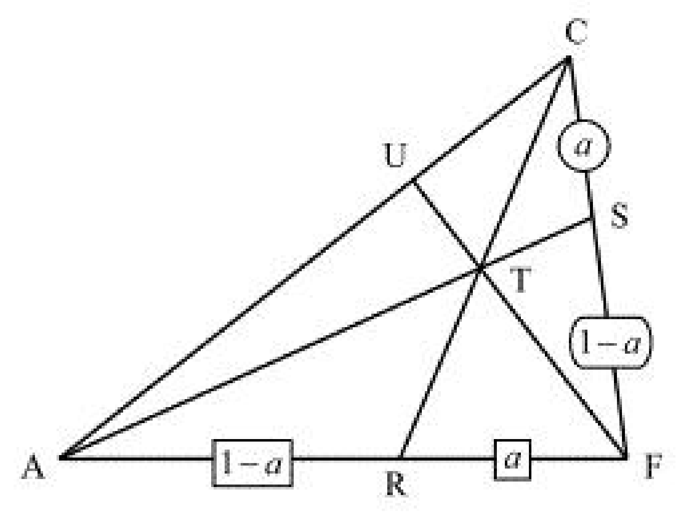
であるから, △FRSにおいて余弦定理より,

$$\begin{aligned}\mathrm{RS}&=\sqrt{\mathrm{FR}^2+\mathrm{FS}^2-2\mathrm{FR}\cdot\mathrm{FS}\cdot\cos\angle\mathrm{AFC}}\\&=\sqrt{10a^2+5(1-a)^2-2a(1-a)}\\&=\sqrt{17a^2-12a+5}\\&=\sqrt{17\left(a-\frac{6}{17}\right)^2+\frac{49}{17}}\end{aligned}$$

が成立する。これは, $a=\frac{6}{17}$ で最小値 $\frac{7}{17}\sqrt{17}$ を取る。

(3)

△ACFを図示すると以下の図のようになる。



したがって, △ACFにおいてチェバの定理より,

$$\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{UA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RF}}\cdot\frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{SC}}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{UA}}\cdot\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-a}{a}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{UA}}=\left(\frac{a}{1-a}\right)^2$$
$$\therefore\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{UA}}=\frac{4}{9}$$

と求まる。

(4)

(3)より $\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{UA}}=\left(\frac{a}{1-a}\right)^2$ だから, △CUFと直線ASにおいて, メネラウスの定理より,

$$\frac{\mathrm{UT}}{\mathrm{TF}}\cdot\frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AU}}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{UT}}{\mathrm{TF}}\cdot\frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{AU}+\mathrm{CU}}{\mathrm{AU}}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{UT}}{\mathrm{TF}}\cdot\frac{1-a}{a}\cdot\left\{1+\left(\frac{a}{1-a}\right)^2\right\}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{UT}}{\mathrm{TF}}=\frac{1}{\frac{1-a}{a}+\frac{a}{1-a}}$$
$$\therefore\frac{\mathrm{UT}}{\mathrm{TF}}=\frac{6}{13}$$

と求まる。

$\boxed{3}$

〔解答〕

(1)	ネ	ノ				
	5	86				
(2)	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
	19	36	13	36	11	13

〔解説〕

(1)

$$86 = 7\cdot 12 + 2 = 13\cdot 6 + 8 \qquad \cdots ①$$

であるから，86は題意を満たすような整数のうちの1つである。題意を満たすような整数nに対して，整数の組k, lが対応して，

$$n = 7k + 2 = 13l + 8 \qquad \cdots ②$$

が成立する。①，②の中辺と右辺を辺々引いて

$$7(k-12) = 13(l-6)$$

である。ここで，7, 13は互いに素であるから，mを整数として

$$k - 12 = 13m$$
$$\Leftrightarrow k = 13m + 12$$

と表せる。したがって，

$$n = 7(13m+12) + 2 = 91m + 86$$

となる。題意より$1 \leqq n \leqq 500$だから，条件を満たすmは

$$1 \leqq 91m + 86 \leqq 500$$
$$\Leftrightarrow -\frac{85}{91} \leqq m \leqq \frac{414}{91} = 4 + \frac{50}{91}$$
$$\therefore m = 0, 1, 2, 3, 4$$

となる。以上より，題意を満たすような整数は5個存在し，それらのうち最小のものは86である。

(2)(i)

a, bの取り得る組み合わせは$6^2 = 36$(通り)存在し，いずれも同様に確からしい。$ab > 0$かつ$a + b + 4 > 0$であることに注意すると，

$$\frac{1}{ab} > \frac{1}{a+b+4}$$
$$\Leftrightarrow a + b + 4 > ab$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) < 5$$

である。これより，題意を満たすような(a, b)の組は，

$$(a, b) = (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3),$$
$$(2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1)$$

の19通り存在する。以上より，$\frac{1}{ab} > \frac{1}{a+b+4}$となる確率は$\frac{19}{36}$である。

(ii)

$\frac{2}{ab}$が有限小数で表されるためには積abが素因数に2または5のみを持てばよく，これはa, bの値が1, 2, 4, 5のいずれかであることと同値である。このような(a, b)の組は，

$$4\cdot 4 = 16\text{(通り)}$$

存在する。これらのうち，$\frac{2}{ab}$が整数となるような(a, b)の組は，$(a, b) = (1,1), (2,1), (1,2)$の3通り存在する。以上より，題意を満たすような$(a, b)$の組は

$$16 - 3 = 13\text{(通り)}$$

存在し，求める確率は$\frac{13}{36}$である。

(iii)

(ii)より，$\frac{2}{ab}$が有限小数で表され，かつ整数でないような(a, b)の組は13通り存在する。$\frac{2}{ab}$が有限小数で表される条件と$\frac{5}{ab}$が有限小数で表される条件は同じであるため，これらの組全てについて$\frac{5}{ab}$は有限小数で表される。また，これら13通りのうち$\frac{2}{ab}$は整数ではないが$\frac{5}{ab}$が整数となるような(a, b)の組は，$(a, b) = (1,5), (5,1)$の2通り存在する。以上より，求める確率は，

$$\frac{13-2}{13} = \frac{11}{13}$$

である。