

2 数学問題 (90分)

(この問題冊子は6ページ、4問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に、試験監督者から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し、所定の欄に氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら、この問題冊子が、上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は、HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能やスマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. マーク式の解答は、解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。
6. マークをするとき、マーク欄からはみ出したり、白い部分を残したり、文字や番号、○や×をつけたりしてはならない。また、マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 問題①②の解答は、各解答用紙に丁寧に記入すること。
足りない場合は、その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には何も書いてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. マーク式解答用紙の最下段の①②の欄には記入しないこと。
10. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはならない。
11. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。
14. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ - にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄とも Z にマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、-にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に 7, イ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位										1 の 位											
ア	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\frac{\square}{\square}$ とする。

0 を, $\frac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\frac{\square}{\square}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\square}{\square} \sqrt{\square}$ にあてはめる場合 $\frac{\square}{\square} \sqrt{\square}$ とする。

$-x^2 + x$ を, $\square x^2 + \square x + \square$ にあてはめる場合

$\square x^2 + \square x + \square$ とする。

1 $\log x$ は x の自然対数, e は自然対数の底を表す。 a を定数とし, 関数

$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{a-x}$$

を考える。

(1) $a = 1$ とする。

(i) 関数 $y = f(x)$ の極値とグラフの変曲点を求め, グラフの概形をかけ。

(ii) 曲線 $y = f(x)$ と, その曲線上の点 $(1 - \sqrt{e}, f(1 - \sqrt{e}))$ における接線, および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $a = 0$ とする。このとき, $f(x)$ が区間 $0 < x < 1$ で単調に増加することを示せ。

- 2** $\triangle ABC$ において、3本の中線の交点を重心 G 、3つの頂点 A, B, C を通る円の中心を外心 O とし、

$$\vec{a} = \vec{OA}, \quad \vec{b} = \vec{OB}, \quad \vec{c} = \vec{OC}$$

とする。2つのベクトル \vec{x} と \vec{y} の内積を $\vec{x} \cdot \vec{y}$ と表す。

- (1) 頂点 A, B, C から、それぞれの対辺またはその延長上に下ろした垂線は1点で交わることを示せ。この交点を $\triangle ABC$ の垂心と呼び、 H とする。
- (2) $\vec{OG} \cdot \vec{AB}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) $\vec{OH} \cdot \vec{AB}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (4) 重心 G 、垂心 H 、外心 O の3点が一直線上にあることを示せ。ただし、ベクトル \vec{x} に対して

$$\vec{x} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{かつ} \quad \vec{x} \cdot \vec{BC} = 0$$

であるならば、 \vec{x} は零ベクトルであることを利用してよい。

3

A, B, C, D, E, Fの6人の高校生が2日間開かれる文化祭で模擬店の売り場を担当する。店を10時から16時まで開く。売り場を2時間ごとに2人ずつが担当し、6人全員が2日とも担当するものとする。

- (1) 1日目の担当の組合せは 通りある。そのうち、A, Bの2人が午後を担当する組合せは 通りあり、A, B, Cの3人が午後を担当する組合せは 通りある。

以下、1日目はAとBが10時から12時、CとDが12時から14時、EとFが14時から16時を担当する場合を考える。

- (2) 2日目の担当の組合せのうち、誰も1日目と同じ人とは組まない組合せは 通りある。
- (3) 2日目の担当の組合せのうち、誰も1日目と同じ人とは組まず、かつ誰も1日目と同じ時間帯を担当しない組合せは 通りある。

4 座標空間において、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ の表す部分は立方体である。また、 $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ の表す部分は高さ1の円柱である。

(1) 座標空間において、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + z^2 \geq 1$ の表す部分を A とする。 A を平面

$z = \frac{1}{2}$ で切ったときの断面積は $\frac{\text{カ}}{\text{キ}} + \text{ク} \sqrt{\text{ケ}}$ であり、

A の体積は $\frac{\text{コ}}{\text{サ}} + \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \pi$ である。

(2) 座標空間において、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + z^2 \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1$ の表す部分を B とする。 B のうち、 z 座標が $0 \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ の範囲にある部分の体積は

$$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}} + \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \sqrt{\text{ツ}} + \frac{\text{テ}}{\text{ト}} \pi$$

であり、 B の体積は $\text{ナ} + \sqrt{\text{ニ}} + \frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}} \pi$ である。



