$\boxed{1}$

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ		
	2	24	−36	16		
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	6	7	2	−1	2	26
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	8	17	4	5	16	−1

〔解説〕

(1)

$$6x^2-18ax+12a^2=6(x-a)(x-2a)$$

である。これと $0<a<1$ に注意すると，x が $0\leqq x\leqq 2$ を動くとき，$6x^2-18ax+12a^2$ は，$0\leqq x\leqq a,\ 2a\leqq x\leqq 2$ では0以上で，$a<x<2a$ では負である。よって，

$$\begin{aligned}
&\int_0^2\left|6x^2-18ax+12a^2\right|dx\\
&=\int_0^a\left(6x^2-18ax+12a^2\right)dx+\int_a^{2a}\left\{-\left(6x^2-18ax+12a^2\right)\right\}dx+\int_{2a}^2\left(6x^2-18ax+12a^2\right)dx\\
&=\int_0^2\left(6x^2-18ax+12a^2\right)dx-2\int_a^{2a}\left(6x^2-18ax+12a^2\right)dx\\
&=\int_0^2\left(6x^2-18ax+12a^2\right)dx+12\int_a^{2a}\left\{-(x-a)(x-2a)\right\}dx\\
&=\left[2x^3-9ax^2+12a^2x\right]_0^2+12\cdot\frac{1}{6}(2a-a)^3\\
&=2a^3+24a^2-36a+16
\end{aligned}$$

となる。

(2)

倍角の公式より，

$$\begin{aligned}
y&=\sin^2 x-\sin x\cos x+6\cos^2 x\\
&=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x+6\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\\
&=-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{5}{2}\cos 2x+\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

となる。さらに，三角関数の合成により，

$$y=\frac{\sqrt{26}}{2}\cos(2x+\alpha)+\frac{7}{2}$$

となる。ただし，α は $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ をみたす数である。$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\alpha\leqq 2x+\alpha\leqq\pi+\alpha$ であるから，$\cos(2x+\alpha)$ は，

$2x+\alpha=\alpha$ のとき最大値 $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}$，

$2x+\alpha=\pi$ のとき最小値 $\cos\pi=-1$

をとる。したがって，y は，

$2x+\alpha=\alpha$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}+\frac{7}{2}=6$，

$2x+\alpha=\pi$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{26}}{2}\cdot(-1)+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{26}$

をとる。

(3)

(i)

a_n の一の位を順に並べると，

$3,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ \ldots$

となる。第2項以降は，周期4の周期数列となる。したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=\begin{cases}3 & (n=1\text{ のとき})\\ 6 & (n\geqq 2\text{ かつ }n\text{ は }4\text{ で割って }2\text{ 余るとき})\\ 2 & (n\geqq 2\text{ かつ }n\text{ は }4\text{ で割って }3\text{ 余るとき})\\ 4 & (n\geqq 2\text{ かつ }n\text{ は }4\text{ で割って }0\text{ 余るとき})\\ 8 & (n\geqq 2\text{ かつ }n\text{ は }4\text{ で割って }1\text{ 余るとき})\end{cases}$$

となる。33は2以上であり，4で割って1余るから，$a_{33}=8$ である。

(ii)

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a=5$，公比2の等比数列であるから，その一般項は，

$$a_n=5\cdot 2^{n-1}$$

である。よって，$a_{55}=5\cdot 2^{54}$ である。常用対数をとると，

$$\begin{aligned}
\log_{10}a_{55}&=\log_{10}\left(10\cdot 2^{53}\right)\\
&=1+53\log_{10}2\\
&=1+53\cdot 0.3010\\
&=16.953
\end{aligned}$$

となる。したがって，$16<\log_{10}a_{55}<17$，すなわち $10^{16}<a_{55}<10^{17}$ であるから，a_{55} は17桁の整数である。

(iii)

(i)より，a_n の一の位が2になるのは，$n\geqq 2$ かつ n は4で割って3余るとき，すなわち

$n=4k-1$ （k は自然数）

とかけるときである。よって，

$$b_n=a_{4n-1}$$

が成り立つ。a_n の一般項は $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ であるから，b_n の一般項は

$$b_n=3\cdot 2^{(4n-1)-1}=3\cdot 2^{4n-2}=\frac{3}{4}\cdot 16^n$$

となる。したがって，求める和は，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}b_n&=\sum_{n=1}^{m}\frac{3}{4}\cdot 16^n\\
&=\frac{3}{4}\cdot\frac{16\left(16^m-1\right)}{16-1}\\
&=\frac{4}{5}\left(16^m-1\right)
\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	あ	い
	(a)	(b)
(2)	チ	
	1	
(3)	ツ	
	4	
(4)	う	テ
	(e)	9
(5)	え	ト
	(c)	0
(6)	お	ナ
	(b)	−7

〔解説〕

(1)

$2^2=4,\ 4\cdot 2-3=5$ より，$2^2<4\cdot 2-3$ である。よって，$2\in A$ である。また，$2^5=32,\ 4\cdot 5-3=17$ より，$2^5>4\cdot 5-3$ である。よって，$5\notin A$ である。

(2)

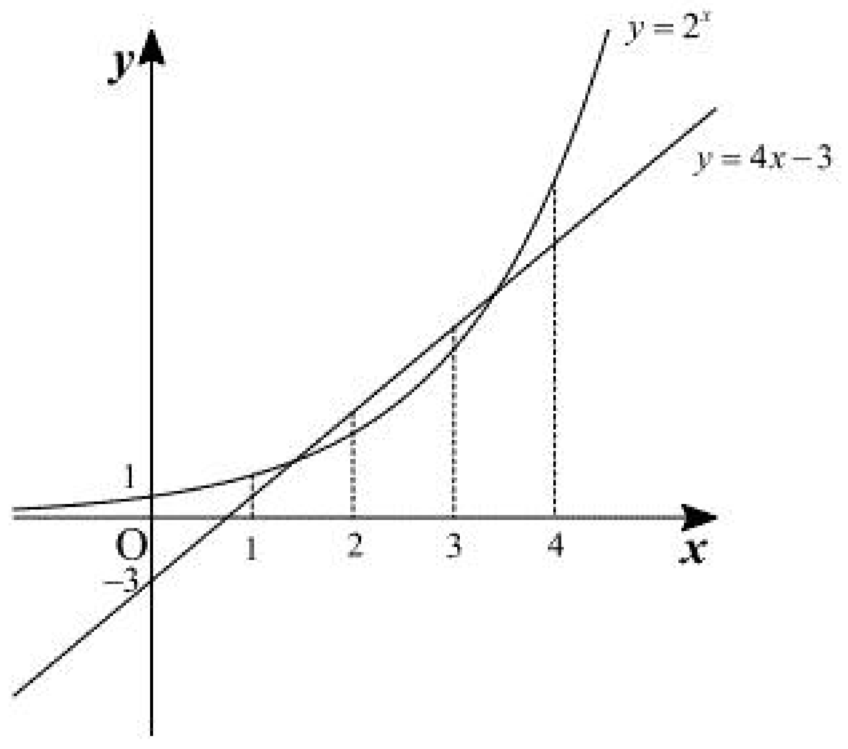
$x=1$ のときは，$2^1=2,\ 4\cdot 1-3=1$ であるから，$2^x>4x-3$，

$x=2$ のときは，$2^2=4,\ 4\cdot 2-3=5$ であるから，$2^x<4x-3$，

$x=3$ のときは，$2^3=8,\ 4\cdot 3-3=9$ であるから，$2^x<4x-3$，

$x=4$ のときは，$2^4=16,\ 4\cdot 4-3=13$ であるから，$2^x>4x-3$

である。$y=2^x$ のグラフは下に凸であるから，$y=2^x$ のグラフと $y=4x-3$ のグラフは下図のようになる。



上図より，方程式 $2^x=4x-3$ の解は $1<x<2,\ 3<x<4$ にそれぞれ1個ずつ存在し，その解をそれぞれ α,β とおいたとき，$A=\{x\,|\,\alpha<x<\beta\}$ となる。よって，$A\cap B$ が空集合であるための b のみたすべき条件は，

$b\leqq\alpha$

である。これを満たす最大の整数は1であるから，求める b の値は $b=1$ である。

(3)

(2)と同様に，$A\subset B$ となるための b のみたすべき条件は，

$\beta\leqq b$

である。これを満たす最小の整数は4であるから，求める b の値は $b=4$ である。

(4)

$x^2-6x+c=(x-3)^2+c-9$ であるから，C が空集合となるための必要十分条件は，

任意の実数 x で $(x-3)^2+c-9\geqq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+c-9$ の最小値が0以上

$\Leftrightarrow c-9\geqq 0$

$\Leftrightarrow c\geqq 9$

である。

(5)

B は空集合ではないから，$B\subset C$ となるためには，C が空集合ではないことが必要である。

(4)より，この必要条件は $c<9$ である。また，このとき，$C=\left\{x\,|\,3-\sqrt{9-c}<x<3+\sqrt{9-c}\right\}$ となるから，求める条件は，

$c<9$ かつ $3-\sqrt{9-c}\leqq 0$ かつ $3+\sqrt{9-c}>5$

$\Leftrightarrow c<9$ かつ $\sqrt{9-c}\geqq 3$

$\Leftrightarrow 9-c\geqq 9$

$\Leftrightarrow c\leqq 0$

である。

(6)

(5)と同様に，求める条件は，

$c<9$ かつ $3-\sqrt{9-c}\leqq 0$ かつ $3+\sqrt{9-c}>7$

$\Leftrightarrow c<9$ かつ $\sqrt{9-c}>4$

$\Leftrightarrow 9-c>16$

$\Leftrightarrow c<-7$

である。

3

〔解答〕

(1)	ニ	ヌ	ネ	ノ			
	1	6	3	2			
(2)	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	
	1	6	−2	3	3	2	
(3)	ミ	ム	メ				
	2	3	9				
(4)	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル
	1	3	−2	3	3	8	3

〔解説〕

(1)

4点A, B, C, Dの座標が$A(3,0)$, $B(3,2)$, $C(0,2)$, $D(0,0)$となるようにxy座標平面を定める。

このとき，点Eの座標は$(0,a)$となる。また，直線AEの傾きは$-\dfrac{a}{3}$であり，線分AEの中点は

$\left(\dfrac{3+0}{2},\ \dfrac{0+a}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$である。

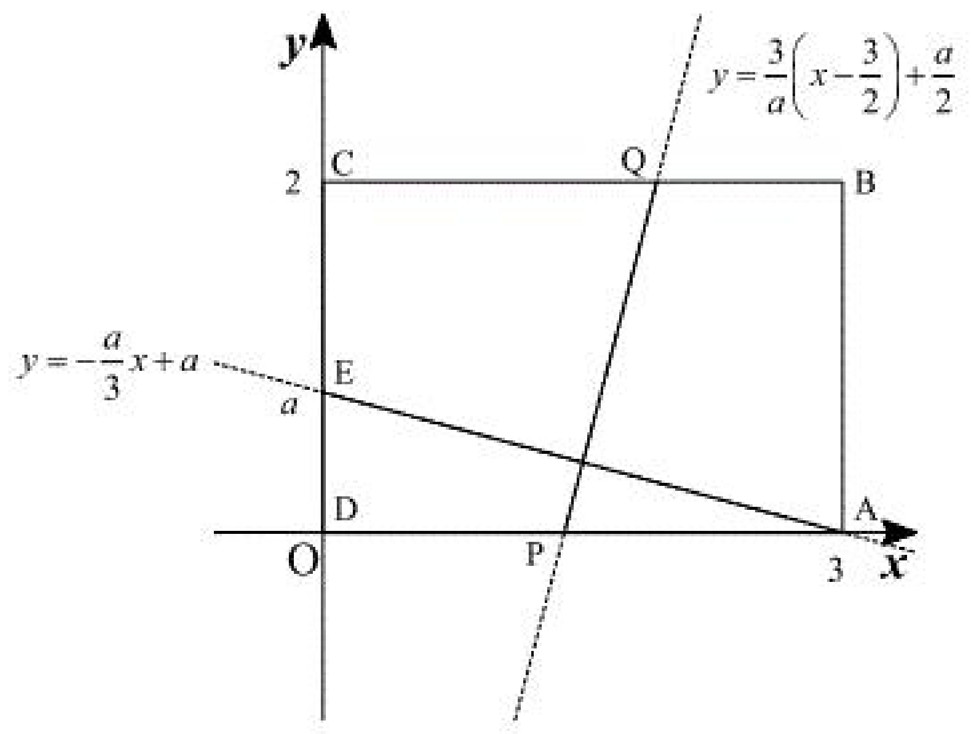
[1] $a\neq 0$のとき

直線PQは，線分AEの垂直二等分線であるから，傾きが$\dfrac{-1}{-\dfrac{a}{3}}=\dfrac{3}{a}$で，線分AEの中点

$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$を通る直線である。したがって，直線PQの方程式は

$$y=\frac{3}{a}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{a}{2}$$

となる。よって，各点を図示すると下図のようになる。



点Pのy座標は0であるから，

$$0=\frac{3}{a}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{a}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}a^2+\frac{3}{2}$$

より，点Pのx座標は$-\dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{3}{2}$である。

[2] $a=0$のとき

このとき，D＝Eであるから，線分AEの垂直二等分線PQの方程式は$x=\dfrac{3}{2}$である。よって点Pのx座標は$\dfrac{3}{2}$である。

以上[1], [2]より，点Pのx座標は$-\dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{3}{2}$である。したがって，

$$\begin{aligned}AP&=3-\left(-\frac{1}{6}a^2+\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{6}a^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2)

[1] $a\neq 0$のとき

(1)より，点Qは直線$y=\dfrac{3}{a}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{a}{2}$と直線$y=2$の交点であるから，

$$2=\frac{3}{a}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{a}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}$$

より，点Qのx座標は$-\dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{2}{3}a+\dfrac{3}{2}$である。

[2] $a=0$のとき，

(1)より，直線PQの方程式は，$x=\dfrac{3}{2}$であるから，点Qのx座標は$\dfrac{3}{2}$である。

以上[1], [2]より，点Qのx座標は$-\dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{2}{3}a+\dfrac{3}{2}$である。したがって，

$$\begin{aligned}BQ&=3-\left(-\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{6}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

(1), (2)の過程より，点P, Qの座標はそれぞれ$\left(-\dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{3}{2},0\right)$, $\left(-\dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{2}{3}a+\dfrac{3}{2},2\right)$であるから，

$$\begin{aligned}PQ&=\sqrt{\left\{\left(-\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{6}a^2+\frac{3}{2}\right)\right\}^2+(2-0)^2}\\&=\sqrt{\frac{4}{9}a^2+4}\\&=\frac{2}{3}\sqrt{a^2+9}\end{aligned}$$

となる。

(4)

四角形ABQPは辺APと辺BQが平行な台形であるから，求める面積は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AB(AP+BQ)&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left\{\left(\frac{1}{6}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{3}{2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a+3\end{aligned}$$

である。これを平方完成すると

$$\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a+3=\frac{1}{3}(a-1)^2+\frac{8}{3}$$

であり，aは$0<a<2$の範囲を動くから，$\dfrac{1}{3}a^2-\dfrac{2}{3}a+3$は$a=1$のときに最小値$\dfrac{8}{3}$をとる。