

1

(1)

$f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ とおくと、 $x > 0$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} - 1 + x \\ &= \frac{x^2}{x+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加である。したがって、 $x > 0$ のとき、

$$f(x) > f(0)$$

が成り立つ。よって、正の実数 x に対して

$$\begin{aligned} \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} &< \log(1+x) \end{aligned}$$

となることが示された。次に、 $g(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \log(1+x)$ とおくと、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x^3}{x+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $g(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加である。したがって、 $x > 0$ のとき、

$$g(x) > g(0) = 0$$

が成り立つ。よって、正の実数 x に対して

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \log(1+x) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log(1+x) &< x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

となることが示された。以上より、正の実数 x に対して

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

である。

(証明終)

(2)

(i)

$\frac{1}{n}$ は正の実数であるので(1)より

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}$$

が成り立つ。ここで $n \geq 1$ より各辺に n をかけて整理すると、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2n} &< n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2n} &< \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2n} &< \log a_n < 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \end{aligned}$$

となる。よって示された。

(証明終)

(ii)

$$e^{0.9} < a_n \Leftrightarrow 0.9 < \log a_n$$

であるから、 $0.9 < \log a_n$ を満たす最小の自然数 n を求めればよい。 $n=1$ のとき(i)より

$$\log a_1 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0.83\cdots < 0.9$$

であるから $n=1$ は不適である。 $n=2$ のとき(i)より

$$\log a_2 < 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 0.83\cdots < 0.9$$

であるから $n=2$ は不適である。 $n=3$ のとき(i)より

$$\log a_3 < 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{27} = 0.87\cdots < 0.9$$

であるから $n=3$ は不適である。 $n=4$ のとき(i)より

$$\log a_4 < 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = 0.89\cdots < 0.9$$

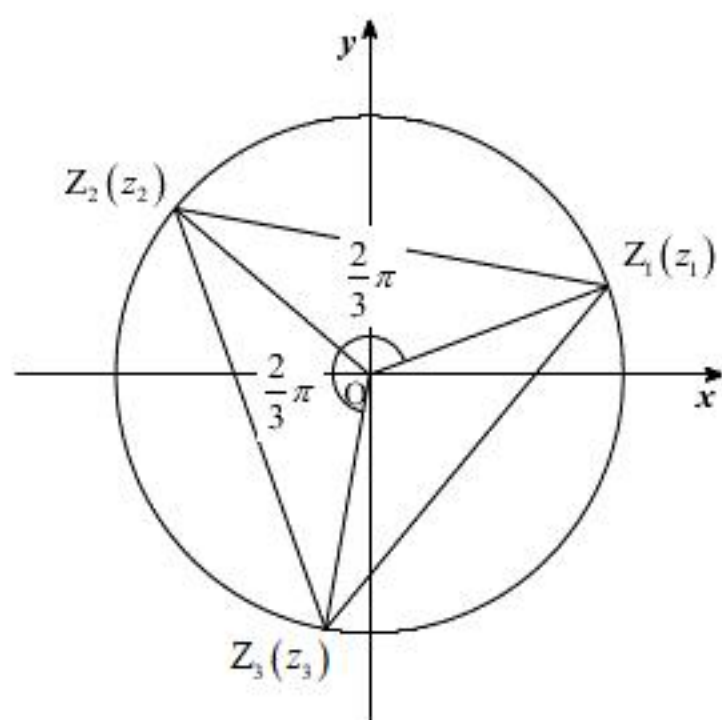
であり、 $n=5$ のとき(i)より

$$\log a_5 > 1 - \frac{1}{10} = 0.9$$

である。よって $e^{0.9} < a_n$ をみたす最小の自然数 n は $n=5$ である。

(答) $n=5$

z_1, z_2, z_3 が表す点をそれぞれ Z_1, Z_2, Z_3 とおく。まず $p \Rightarrow q$ であることを示す。 z_1, z_2, z_3 がこの順に反時計回りに並んでいるとしても一般性を失わない。 $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ が正三角形であるとき、各点の位置関係は下図のようになる。



上図より、 Z_2, Z_3 は、原点を中心にして Z_1 をそれぞれ $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 回転させた点である。したがって、

$$z_2 = z_1 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$z_3 = z_1 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right)$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= z_1 + z_1 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) + z_1 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \\ &= z_1 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。よって $p \Rightarrow q$ が示された。

次に $q \Rightarrow p$ を示す。 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_3|^2 \\ \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) &= z_3 \overline{z_3} \\ \Leftrightarrow |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2 &= |z_3|^2 \\ \Leftrightarrow 2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} &= 1 \\ \Leftrightarrow z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} &= -1 \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_2 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2}) \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となり、 $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ である。同様にして、

$$|z_2 - z_3| = \sqrt{3}, |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$$

である。 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| \neq 0$ より、 $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ は3辺の長さが等しいため、正三角形である。よって $q \Rightarrow p$ が成り立つ。以上より $p \Leftrightarrow q$ が示された。

【解答】

(1)	あ	い	う	え
	②	⑥	⑫	⑩
(2)	お	か	き	く
	④	⑬	⑤	②

【解説】

(1)

3点P, Q, Rの座標はそれぞれ $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(q, \frac{1}{q}\right)$, $R\left(r, \frac{1}{r}\right)$ と表される。このとき△PQRの重心Gの座標は

$$\left(\frac{p+q+r}{3}, \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}{3}\right) = \left(\frac{p+q+r}{3}, \frac{pq+qr+rp}{3pqr}\right)$$

である。次に垂心Hの座標を求める。辺QRの傾きは

$$\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{r-q} = -\frac{1}{qr}$$

であるから、点Pから辺QRにおろした垂線は、点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$ を通り傾き $\frac{-1}{qr} = qr$ の直線である。

よって、その方程式は

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{p} &= qr(x - p) \\ \Leftrightarrow y &= qrx + \frac{1}{p} - pqr \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。同様に、点Qから辺PRにおろした垂線の方程式は $y = rpx + \frac{1}{q} - pqr$ である。この2直線の交点が垂心Hである。2式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} qrx - rpx &= -\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ \Leftrightarrow r(q-p)x &= -\frac{q-p}{pq} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{pqr} \end{aligned}$$

となるから、点Hの x 座標は $-\frac{1}{pqr}$ である。また、 y 座標は、 $x = -\frac{1}{pqr}$ を①に代入して、

$$y = qr\left(-\frac{1}{pqr}\right) + \frac{1}{p} - pqr = -pqr$$

である。以上より、垂心Hの座標は $\left(-\frac{1}{pqr}, -pqr\right)$ である。

(2)

(i)

(1)より、

$$a = \frac{p+q+r}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。△PQRが正三角形のとき、重心と垂心は一致するから、

$$\begin{cases} \frac{p+q+r}{3} = -\frac{1}{pqr} & \dots \textcircled{3} \\ \frac{pq+qr+rp}{3pqr} = -pqr & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ。②より、

$$p+q+r = 3a \quad \dots \textcircled{5}$$

である。②、③より、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{pqr} \\ \therefore pqr &= -\frac{1}{a} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{6}$$

である。④、⑥より、

$$\begin{aligned} \frac{pq+qr+rp}{3 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} &= -\left(-\frac{1}{a}\right) \\ \therefore pq+qr+rp &= -\frac{3}{a^2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{7}$$

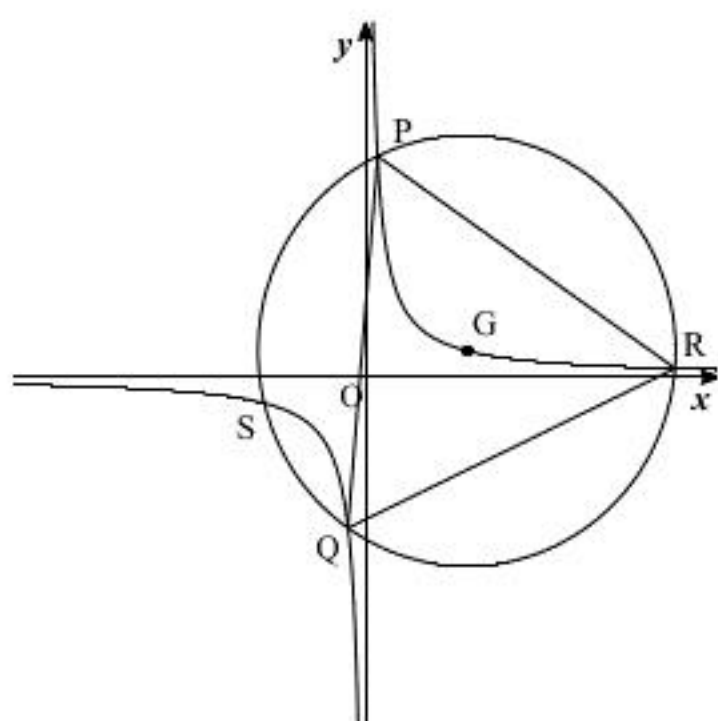
である。以上⑤、⑥、⑦、および解と係数の関係より、 p, q, r を解に持つ方程式は

$$x^3 - 3ax^2 - \frac{3}{a^2}x + \frac{1}{a} = 0$$

である。

(ii)

△PQRおよび点G、点Sを図示すると以下ようになる。



正三角形において外心と垂心は一致するから、外心の座標は

$$\left(-\frac{1}{pqr}, -pqr\right) = \left(a, \frac{1}{a}\right)$$

となる。よって、外接円の半径を R とおくと、△PQRの外接円の方程式は

$$(x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = R^2$$

と表される。この円と双曲線 $xy=1$ の方程式から y を消去すると、 $x \neq 0$ の下で、

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow x^2(x-a)^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 &= R^2 x^2 \\ \Leftrightarrow x^2(x-a)^2 - R^2 x^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この4次方程式の4解が4点P, Q, R, Sの x 座標となる。この4次方程式の最高次の項の係数は1、定数項は1であるから、解と係数の関係より、

$$pqrs = 1$$

が成り立つ。したがって、⑥より、

$$\begin{aligned} -\frac{s}{a} &= 1 \\ \therefore s &= -a \end{aligned}$$

となる。

4

〔解答〕

(1)	け	こ					
	③	④					
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	0	-4	-1	4	3	4	2

〔解説〕

(1)

積和公式より、

$$\cos kx \cos lx = \frac{\cos(k+l)x + \cos(k-l)x}{2}$$

が成り立つ。よって、 $k \neq l$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx \cos lx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k+l)x + \cos(k-l)x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{k+l} \sin(k+l)x + \frac{1}{k-l} \sin(k-l)x \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (\because k+l, k-l \neq 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。また、 $k = l$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx \cos lx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k+l)x + \cos(k-l)x}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2kx + 1}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{4k} \sin 2kx + \frac{1}{2} x \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (\because 2k \neq 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(2)

(i)

$-\pi \leq x < 0$ のとき $\sin x \leq 0$ より $|\sin x| = -\sin x$ であり、 $0 \leq x \leq \pi$ のとき $\sin x \geq 0$ より $|\sin x| = \sin x$ である。よって、まず、 $k = 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= -\int_{-\pi}^0 \sin x \cos x dx + \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx \\ &= -\int_{-\pi}^0 \frac{\sin 2x}{2} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} [\cos 2x]_{-\pi}^0 - \frac{1}{4} [\cos 2x]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。また、 $k \neq 1$ のとき、積和公式より、

$$\begin{aligned} a_k &= -\int_{-\pi}^0 (\sin x \cos kx) dx + \int_0^{\pi} (\sin x \cos kx) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \{\sin(1+k)x + \sin(1-k)x\} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{\sin(1+k)x + \sin(1-k)x\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1+k} \cos(1+k)x + \frac{-1}{1-k} \cos(1-k)x \right]_{-\pi}^0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1+k} \cos(1+k)x + \frac{-1}{1-k} \cos(1-k)x \right]_0^{\pi} \quad (\because 1+k, 1-k \neq 0) \end{aligned}$$

と表される。 k が奇数のとき $\cos(1+k)\pi = \cos(1-k)\pi = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1+k} + \frac{-1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1+k} + \frac{-1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。 k が偶数のとき $\cos(1+k)\pi = \cos(1-k)\pi = -1$ であるから、

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1+k} + \frac{-1}{1-k} + \frac{-1}{1+k} + \frac{-1}{1-k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right) \\ &= \frac{-4}{k^2 - 1} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

(2)(i)より k が奇数のとき $a_k = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{|a_1|} \cos x + \sqrt{|a_2|} \cos 2x \\ &= \sqrt{|a_2|} \cos 2x \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f_1(x)\}^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a_2| \cos^2 2x dx \end{aligned}$$

である。(1)より $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx = 1$ 、(2)(i)より $|a_2| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} I_1 &= |a_2| \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。同様に、 k が奇数のとき $a_k = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{|a_k|} \cos kx \\ &= \sqrt{|a_2|} \cos 2x + \sqrt{|a_4|} \cos 4x + \cdots + \sqrt{|a_{2n}|} \cos 2nx \end{aligned}$$

である。ここで、(1)より、 $k \neq l$ のとき $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx \cos lx) dx = 0$ であるから、

$$\{f_n(x)\}^2 = \left(\sqrt{|a_2|} \cos 2x + \sqrt{|a_4|} \cos 4x + \cdots + \sqrt{|a_{2n}|} \cos 2nx \right)^2$$

を展開したときの $\cos kx \cos lx$ ($k \neq l$) の形の項は積分値に寄与しない。したがって、

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|a_2| \cos^2 2x + |a_4| \cos^2 4x + \cdots + |a_{2n}| \cos^2 2nx) dx$$

が成り立つ。再び(1)より、 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = 1$ であるから、

$$I_n = |a_2| + |a_4| + \cdots + |a_{2n}|$$

となり、(2)(i)より、

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{l=1}^n \left| \frac{-4}{(2l)^2 - 1} \right| \\ &= \sum_{l=1}^n 2 \cdot \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{4n}{2n+1} \end{aligned}$$

となる。