1

〔解答〕

(1)	ア	イ						
	−5	−6						
(2)	ウ	エ						
	15	14						
(3)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	7	6	7	7	6	3	5

〔解説〕

(1)

a, bを実数として$P(x)=2x^2+ax+b$とおく。$P(x)$を$x+1$で割った余りが1，$x-2$で割った余りが-8であるので，剰余の定理より$P(-1)=1$, $P(2)=-8$である。よって，

$$\begin{cases}P(-1)=1\\P(2)=-8\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-a+b=1\\8+2a+b=-8\end{cases}$$
$$\therefore (a, b)=(-5, -6)$$

である。よって，$P(x)=2x^2-5x-6$である。

(2)

(i)

n年後の元利合計をa_n万円とすると，年利5％であるので，

$$a_n=(1.05)a_{n-1}$$

である。元金が1万円であるから，$a_0=1$として考えると，数列$\{a_n\}$は初項$a_0=1$，公比1.05の等比数列である。よって，

$$a_n=(1.05)^n$$

となる。ここで，

$$a_n>2$$
$$\Leftrightarrow (1.05)^n>2$$
$$\Leftrightarrow \log_{10}(1.05)^n>\log_{10}2\ \left(\because (1.05)^n>0,\ 2>0,\ 10>1\right)$$
$$\Leftrightarrow n\log_{10}(1.05)>\log_{10}2$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}2}{\log_{10}(1.05)}\ \left(\because \log_{10}(1.05)>0\right)$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}2}{\log_{10}\frac{21}{20}}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}2}{\log_{10}21-\log_{10}20}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}2}{\log_{10}(3\cdot7)-\log_{10}(2\cdot10)}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3+\log_{10}7-\log_{10}2-1}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{0.3010}{0.4771+0.8451-0.3010-1}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{0.3010}{0.0212}$$
$$\Leftrightarrow n>14.1981\cdots$$

となるから，$a_n>2$となる最小の自然数nは$n=15$である。以上より，元利合計が初めて2万円を超えるのは15年後である。

(ii)

n年後の資金をb_n万円とすると，問題の条件より

$$b_n=(1.05)b_{n-1}+1$$

となる。この式を変形すると，

$$b_n+20=(1.05)(b_{n-1}+20)$$

となる。元金が1万円であるから，$b_0=1$として考えると，数列$\{b_n+20\}$は初項$b_0+20=21$，公比1.05の等比数列である。よって，

$$b_n=21(1.05)^n-20$$

である。ここで，

$$b_n>20$$
$$\Leftrightarrow 21(1.05)^n-20>20$$
$$\Leftrightarrow (1.05)^n>\frac{40}{21}$$
$$\Leftrightarrow \log_{10}(1.05)^n>\log_{10}\frac{40}{21}\ \left(\because (1.05)^n>0,\ \frac{40}{21}>0,\ 10>1\right)$$
$$\Leftrightarrow n\log_{10}(1.05)>\log_{10}\frac{40}{21}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}40-\log_{10}21}{\log_{10}(1.05)}\ \left(\because \log_{10}(1.05)>0\right)$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}40-\log_{10}21}{\log_{10}\frac{21}{20}}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\log_{10}40-\log_{10}21}{\log_{10}21-\log_{10}20}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{2\log_{10}2+1-\log_{10}3-\log_{10}7}{\log_{10}3+\log_{10}7-\log_{10}2-1}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{2(0.3010)+1-0.4771-0.8451}{0.4771+0.8451-0.3010-1}$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{0.2798}{0.0212}$$
$$\Leftrightarrow n>13.19\cdots$$

となるから，$b_n>20$となる最小の自然数nは，$n=14$である。以上より，資金が初めて20万円を超えるのは，14年後である。

(3)

$P(A)=\frac{3}{5}$より，

$$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{5}$$

である。また，

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{5}{2}P(\overline{A}\cap B)$$
$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{3}P(A\cap B)$$

であるので，

$$\frac{P_{\overline{A}}(B)}{P_A(B)}=9$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}P(\overline{A}\cap B)=9\cdot\frac{5}{3}P(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(\overline{A}\cap B)=6P(A\cap B) \qquad \cdot\cdot\cdot①$$

となる。また，

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$

であるから，①とあわせて，

$$P(B)=7P(A\cap B)=\frac{7}{6}P(\overline{A}\cap B)$$

となる。以上より，

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{7}$$
$$P_B(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{6}{7}$$

である。また，

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{3}{5}+7P(A\cap B)-P(A\cap B)\\&=6P(A\cap B)+\frac{3}{5}\end{aligned}$$

である。

2

〔解答〕

(1)	ス	セ	ソ	
	1	2	−1	
(2)	タ			
	2			
(3)	チ	ツ	テ	ト
	−1	2	3	2
(4)	ナ	ニ		
	2	2		
(5)	ヌ	ネ	ノ	
	3	8	3	

〔解説〕

(1)

$s=x+y,\ t=xy$ のとき，$x^2+y^2=1$ を用いると

$$s^2=(x+y)^2$$
$$=x^2+2xy+y^2$$
$$=2t+1$$
$$\therefore t=\frac{1}{2}\left(s^2-1\right)$$

となる。

(2)

$x^2+y^2=1$ より，$0\leqq\theta<2\pi$ である実数 θ を用いて，$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とおける。このとき，

$$s^2=2xy+1$$
$$=2\sin\theta\cos\theta+1$$
$$=\sin 2\theta+1$$

である。ここで，$0\leqq\theta<2\pi$ において $-1\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ であることから，$0\leqq s^2\leqq 2$ である。

(3)

$s=x+y,\ t=xy,\ t=\frac{1}{2}\left(s^2-1\right)$ を用いて与式を変形すると，

$$F(x,\ y)=x^3+y^3-a(x+y)$$
$$=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-as$$
$$=s(1-t)-as$$
$$=s-\frac{1}{2}s\left(s^2-1\right)-as$$
$$=-\frac{1}{2}s^3+\left(\frac{3}{2}-a\right)s$$

となる。

(4)

$a=1$ のとき，(3)より $F(x,\ y)=-\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{2}s$ である。ここで，$F(x,\ y)=G(s)$ とおくと，

$$G'(s)=-\frac{3}{2}s^2+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s^2-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

となる。ここで，s のとりうる値の範囲について，

$$s=\cos\theta+\sin\theta$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であるので，$-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ である。よって，$G'(s)=0$ となるのは $s=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ のときであり，増減表は以下のようになる。

s	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$G'(s)$	−	−	0	+	0	−	−
$G(s)$		↘	極小	↗	極大	↘	

増減表より，$-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ における $G(s)$ の最大値として，$G\left(-\sqrt{2}\right)$ または $G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ が考えられる。ここで，

$$G\left(-\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であり，また，

$$G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

である。$\frac{\sqrt{2}}{2}>0,\ \frac{\sqrt{3}}{9}>0,\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\ \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2=\frac{1}{27}$ であるから，$\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{9}$，つまり $G\left(-\sqrt{2}\right)>G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ である。以上より，$F(x,\ y)$ は $s=-\sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

(5)

$a=\frac{3}{8}$ のとき，(3)より $F(x,\ y)=-\frac{1}{2}s^3+\frac{9}{8}s$ である。ここで，新たに $F(x,\ y)=G(s)$ とおくと，

$$G'(s)=-\frac{3}{2}s^2+\frac{9}{8}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s^2-\frac{3}{4}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。よって，$G'(s)=0$ となるのは $s=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ のときであり，増減表は以下のようになる。

s	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$G'(s)$	−	−	0	+	0	−	−
$G(s)$		↘	極小	↗	極大	↘	

増減表より，$-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ における $G(s)$ の最大値として，$G\left(-\sqrt{2}\right)$ または $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が考えられる。ここで，

$$G\left(-\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3+\frac{9}{8}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}-\frac{9\sqrt{2}}{8}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

であり，また，

$$G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{3\sqrt{3}}{16}+\frac{9\sqrt{3}}{16}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

である。$-\frac{\sqrt{2}}{8}<0<\frac{3\sqrt{3}}{8}$ であるから，$G\left(-\sqrt{2}\right)<G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。以上より，$F(x,\ y)$ は $s=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ をとる。

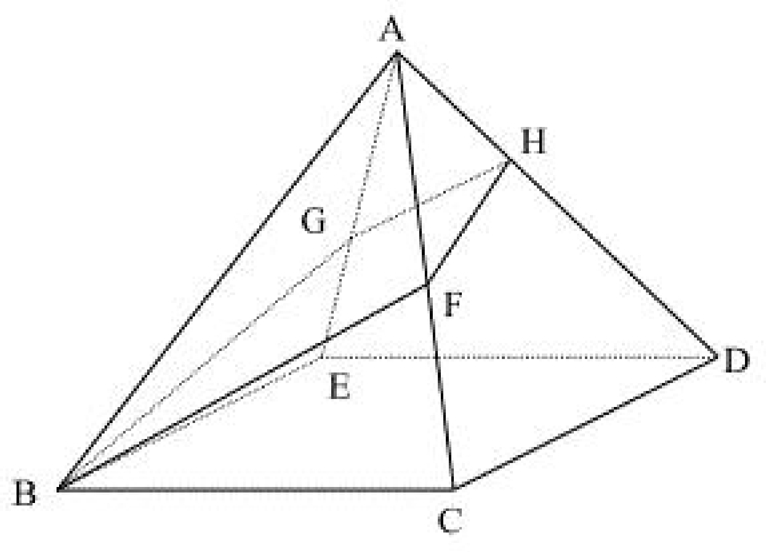
3

〔解答〕

(1)	ハ	ヒ	
	2	3	
(2)	フ	ヘ	ホ
	2	3	5
(3)	マ	ミ	ム
	7	11	6
(4)	メ	モ	ヤ
	2	9	2

〔解説〕

(1)



$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c},\ \overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると，

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}\right)$$

となる。点Hは平面α上にあるから，s, tを実数として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}&=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AF}+(1-s-t)\overrightarrow{AG}\\&=\frac{1+s-t}{2}\vec{b}+\frac{-1+s+2t}{2}\vec{c}+\frac{1-s-t}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

と表せる。また，点Hは辺AD上にあるから，$0\leqq k\leqq 1$である実数kを用いて

$$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AD}$$

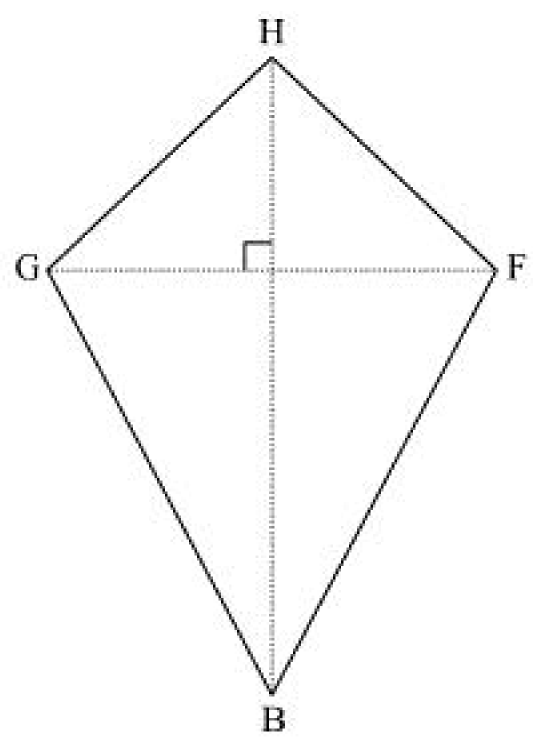
と表せる。$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$は1次独立であるから，係数を比較することにより，

$$\begin{cases}\dfrac{1+s-t}{2}=0\\ \dfrac{-1+s+2t}{2}=0\\ \dfrac{1-s-t}{2}=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=-\dfrac{1}{3}\\ t=\dfrac{2}{3}\\ k=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

となる。よって，$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$であり，$AH=\frac{1}{3}\cdot AD=\frac{2}{3}$である。

(2)

まず，点Fと点Gは，△ABHを含む平面に対して対称であるから，$BH\perp FG$である。よって，位置関係は下図の通りになる。



ここで，四角形BCDEは正方形であるから，$BD=CE=2\sqrt{2}$である。よって，△ACEと△ABDは辺の大きさが$2, 2, 2\sqrt{2}$の直角二等辺三角形であり，$\angle BAD=\angle CAE=90°$であることが分かる。したがって，三平方の定理を用いて，

$$BH=\sqrt{AH^2+AB^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$GF=\sqrt{AG^2+AF^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

となる。以上より，求める断面積Sは，

$$S=\frac{1}{2}\cdot BH\cdot FG=\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

である。

(3)

平面αによって分けられてできる立体のうち，点Dを含む立体について，頂点の数は

B, C, D, E, F, G, H

の7である。次に，辺の数は

BC, CD, DE, EB, CF, DH, EG, BF, BG, FH, GH

の11である。最後に，面の数は

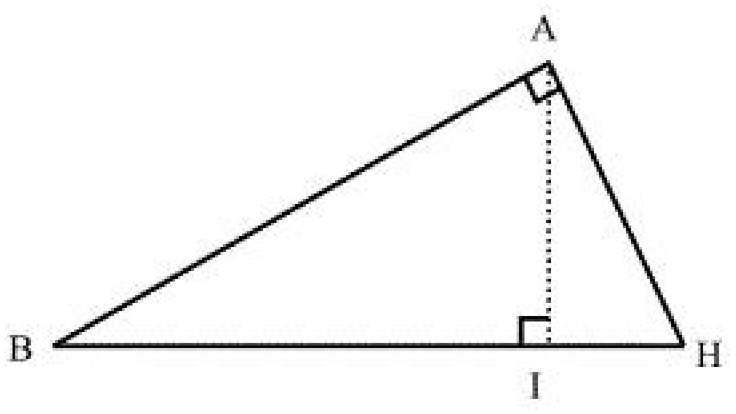
四角形BFHG, FCDH, HDEG, BCDE

三角形BCF, BEG

の6である。

(4)

点Aから平面αに下ろした垂線の足を点Iとする。四角錐A-BFHGは，△ABHを含む平面に対して対称であるから，点Iは直線BH上にある。△ABHについて，$\angle BAH=\angle BAD=90°$であるから，点Iは線分BH上に存在し，位置関係は下図の通りになる。



よって，

$$\triangle ABH=\frac{1}{2}AH\cdot AB=\frac{1}{2}AI\cdot BH$$

$$\therefore AI=\frac{AH\cdot AB}{BH}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2}{\frac{2\sqrt{10}}{3}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

となる。以上より，求める立体の体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot AI=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{2}{9}\sqrt{2}$$

である。