1

〔解答〕

<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td>ア</td><td>イ</td></tr>
<tr><td>−5</td><td>−6</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(2)</td><td rowspan="2">(i)</td><td>ウ</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(ii)</td><td>エ</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td>オ</td><td>カ</td><td>キ</td><td>ク</td><td>ケ</td><td>コ</td><td>サ</td><td>シ</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td></tr>
</table>

〔解説〕

(1)

x の 2 次方程式 $P(x)$ は，x^2 の係数が 2 であるから，実数 a, b を用いて，

$$P(x) = 2x^2 + ax + b \qquad ・・・①$$

と表せる。$P(x)$ を $x+1,\ x-2$ で割ったときの余りがそれぞれ $1, -8$ であることから，剰余の定理より，

$$\begin{cases} P(-1) = 2 - a + b = 1 \\ P(2) = 8 + 2a + b = -8 \end{cases}$$

が成立する。この連立方程式を解くと，

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = -6 \end{cases}$$

が得られるから，$P(x) = 2x^2 - 5x - 6$ である。

(2)(i)

与えられた条件の下での n 年後の元利合計を A_n 万円とする。このとき，

$$A_n = 1 \cdot (1 + 0.05)^n$$

が成り立ち，c 年後に初めて元利合計が 2 万円を超えるとすると c は，

$$A_n > 2$$

を満たす最小の自然数 n に等しい。ここで，与えられた条件を利用すると，

$$\begin{aligned}
&A_n > 2 \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot (1 + 0.05)^n > 2 \\
&\Leftrightarrow n \log_{10} \frac{21}{20} > \log_{10} 2 \\
&\Leftrightarrow n(\log_{10} 21 - \log_{10} 20) > \log_{10} 2 \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 21 - \log_{10} 20} \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3 + \log_{10} 7 - \log_{10} 2 - 1} \\
&\Leftrightarrow n > \frac{0.3010}{0.4771 + 0.8451 - 0.3010 - 1} \\
&\Leftrightarrow n > \frac{0.3010}{0.0212} \\
&\Leftrightarrow n > 14.19811\cdots
\end{aligned}$$

であるから，$c = 15$ とわかる。

(ii)

与えられた条件の下での n 年後の資金を B_n 万円とする。このとき元金の 1 万円は n 年後に A_n 万円となり，1 年後に新たに積み立てた 1 万円は n 年後に A_{n-1} 万円となる。同様に，k 年後($1 \leqq k \leqq n-1$)に積み立てた 1 万円は n 年後に A_{n-k} 万円となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
B_n &= A_n + A_{n-1} + \cdots + A_2 + A_1 + 1 \\
&= \left(\frac{105}{100}\right)^n + \left(\frac{105}{100}\right)^{n-1} + \cdots \left(\frac{105}{100}\right)^2 + \left(\frac{105}{100}\right)^1 + 1 \\
&= 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{105}{100}\right)^{n+1}}{1 - \frac{105}{100}} \\
&= 20\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{n+1} - 1\right\}
\end{aligned}$$

が成立する。d 年後に初めて資金が 20 万円を超えるとすると d は，

$$B_n > 20$$

を満たす最小の自然数 n に等しい。ここで，

$$\begin{aligned}
&B_n > 20 \\
&\Leftrightarrow 20\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{n+1} - 1\right\} > 20 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{21}{20}\right)^{n+1} - 1 > 1 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{21}{20}\right)^{n+1} > 2 \\
&\Leftrightarrow (n+1) \log_{10} \frac{21}{20} > \log_{10} 2 \\
&\Leftrightarrow (n+1)(\log_{10} 21 - \log_{10} 20) > \log_{10} 2 \\
&\Leftrightarrow n + 1 > \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 21 - \log_{10} 20} \\
&\Leftrightarrow n + 1 > \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3 + \log_{10} 7 - \log_{10} 2 - 1} \\
&\Leftrightarrow n + 1 > 14.19811\cdots \ (\because \text{(i)}) \\
&\Leftrightarrow n > 13.19811\cdots
\end{aligned}$$

であるから，$d = 14$ とわかる。

(3)

与えられた条件より，

$$P(A) = \frac{3}{5} \qquad ・・・②$$

$$\frac{P_{\overline{A}}(B)}{P_A(B)} = 9 \qquad ・・・③$$

である。また，②より，

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \qquad ・・・④$$

である。

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$$

であるから，②，③，④より，

$$9 = \frac{\dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}}{\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}} = \frac{\dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{\frac{2}{5}}}{\dfrac{P(A \cap B)}{\frac{3}{5}}}$$

$$\therefore P(\overline{A} \cap B) = 6 \times P(A \cap B)$$

が得られる。ここで，

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 7 \times P(A \cap B)$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{7 \times P(A \cap B)} \\
&= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

とわかる。同様にして，

$$\begin{aligned}
P_B(\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{6 \times P(A \cap B)}{7 \times P(A \cap B)} \\
&= \frac{6}{7}
\end{aligned}$$

とわかる。さらに，

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(\overline{A} \cap B) + P(A) \\
&= 6 \times P(A \cap B) + \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

である。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	ス	セ	ソ	
	1	2	−1	
(2)	タ			
	2			
(3)	チ	ツ	テ	ト
	−1	2	3	2
(4)	ナ	ニ		
	2	2		
(5)	ヌ	ネ	ノ	
	3	8	3	

〔解説〕

(1)

$x^2+y^2=1$ に注意すると，

$$s^2=(x+y)^2$$
$$=x^2+y^2+2xy$$
$$=1+2xy$$

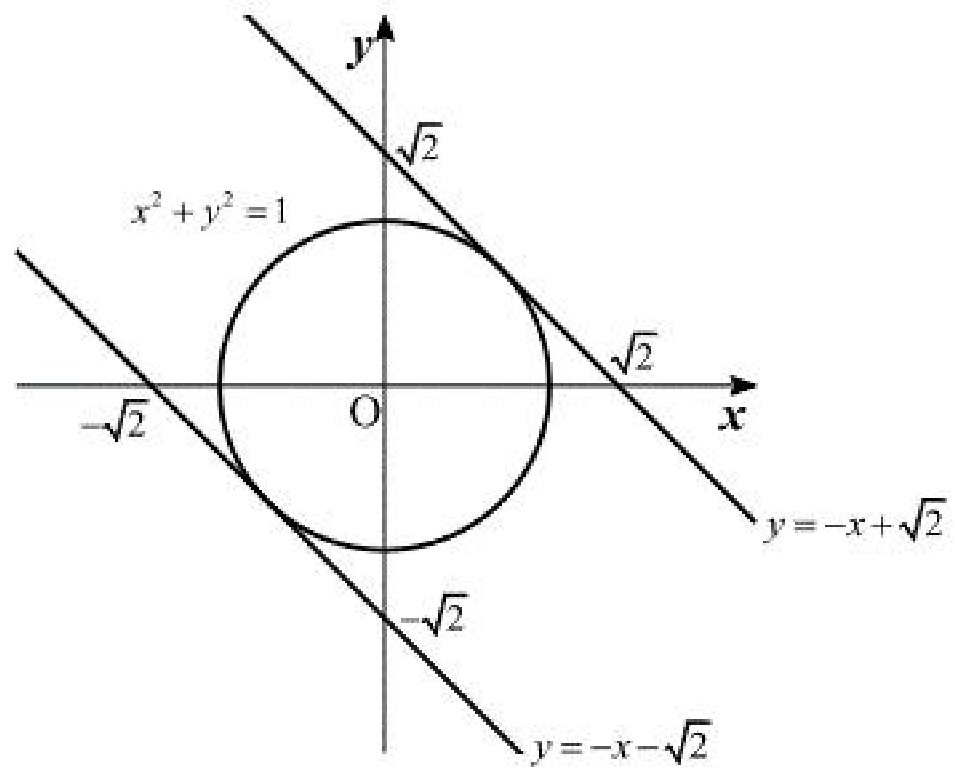
である。よって

$$t=xy$$
$$=\frac{1}{2}\left(s^2-1\right)$$

となる。

(2)

まず，xy 平面上において，直線 $x+y=s$ が円 $x^2+y^2=1$ と交点を持つような s の値の範囲を求める。s が最大値および最小値をとるのは，それぞれ直線 $x+y=s$ が円 $x^2+y^2=1$ と第一象限および第三象限で接する時であり，この場合の直線と円の位置関係を以下に示す。



上図より，点 (x, y) が円 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき，$s=x+y$ は $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ を満たすから，s^2 のとりうる値の範囲は，$0\leqq s^2\leqq 2$ である。

(3)

(1)で求めた $t=\frac{1}{2}\left(s^2-1\right)$ を用いると

$$F(x, y)=x^3+y^3-a(x+y)$$
$$=(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)-a(x+y)$$
$$=(x+y)\left\{(x+y)^2-3xy\right\}-a(x+y)$$
$$=s\left(s^2-3t\right)-as$$
$$=-\frac{1}{2}s^3+\left(\frac{3}{2}-a\right)s$$

と表せる。

(4)

(3)より，$a=1$ のとき $F(x, y)=-\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{2}s$ と表せる。これを $f(s)=-\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{2}s$ とおく。(2)より，$f(s)$ の $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ の範囲における最大値を求めればよい。$f(s)$ を微分すると，

$$f'(s)=-\frac{3}{2}s^2+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s^2-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(s-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

が得られる。$f'(s)=0$ となるのは $s=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ の時であり，これは $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ をみたしている。したがって，$f(s)$ の増減表は以下のようになる。

s	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(s)$		−	0	+	0	−	
$f(s)$		↘	極小	↗	極大	↘	

上表より，$f(s)$ の $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ における最大値は，$f\left(-\sqrt{2}\right)$ または $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のどちらかである。ここで，

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

であり，$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{9\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18}>0$ より $f\left(-\sqrt{2}\right)>f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とわかる。よって，求める最大値は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

(5)

(4)と同様に考える。$a=\frac{3}{8}$ のとき，$F(x, y)=-\frac{1}{2}s^3+\frac{9}{8}s$ と表せる。$g(s)=-\frac{1}{2}s^3+\frac{9}{8}s$ とおき，$g(s)$ の $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ の範囲における最大値を求める。$g(s)$ を微分すると，

$$g'(s)=-\frac{3}{2}s^2+\frac{9}{8}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s^2-\frac{3}{4}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}\left(s+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

が得られる。$g'(s)=0$ となるのは $s=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ の時であり，これは $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ をみたしている。したがって，$g(s)$ の増減表は以下のようになる。

s	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(s)$		−	0	+	0	−	
$g(s)$		↘	極小	↗	極大	↘	

上表より，$g(s)$ の $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ における最大値は，$g\left(-\sqrt{2}\right)$ または $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のどちらかである。ここで，

$$g\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\frac{9\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$
$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}+\frac{9\sqrt{3}}{16}=\frac{6\sqrt{3}}{16}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

であり，$g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>g\left(-\sqrt{2}\right)$ とわかる。よって，求める最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ である。

3

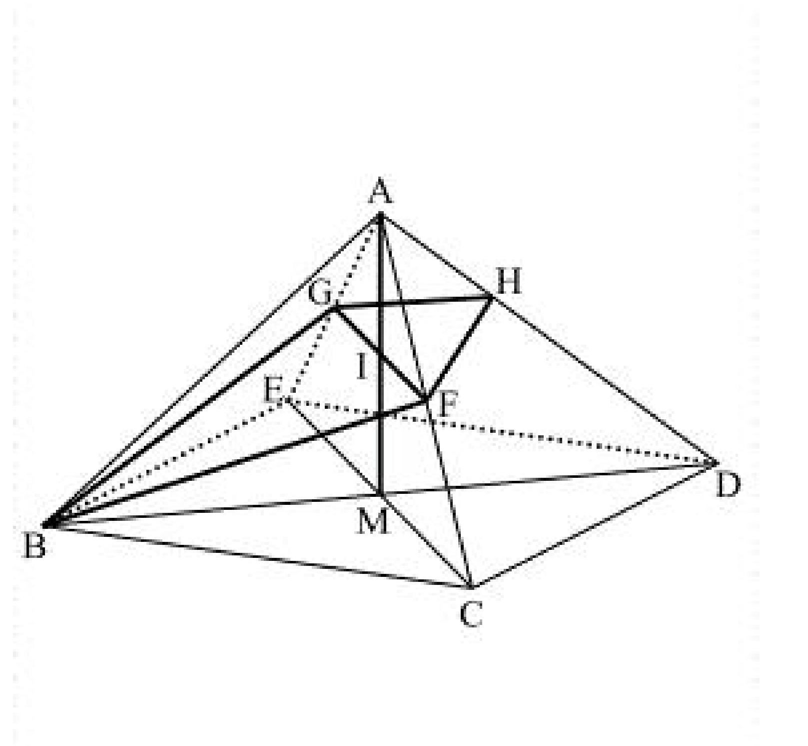
〔解答〕

(1)	ハ	ヒ	
	2	3	
(2)	フ	ヘ	ホ
	2	3	5
(3)	マ	ミ	ム
	7	11	6
(4)	メ	モ	ヤ
	2	9	2

〔解説〕

(1)

四角錐 A-BCDE および点 F, G を図に示すと次の通りとなる。



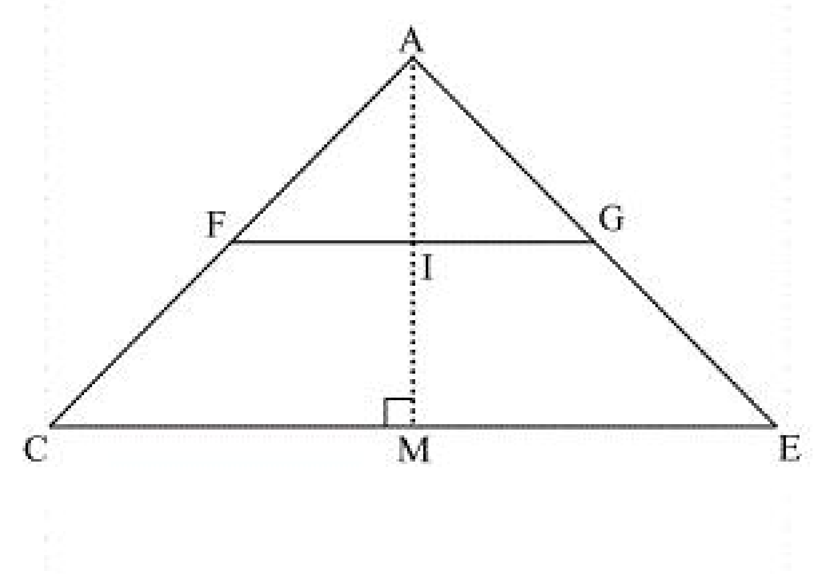
問題文より,

$$AB = AC = AD = AE = BC = CD = DE = EB = 2$$

である。四角形 BCDE は正方形であるから三平方の定理より,

$$BD = CE = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

である。また, 対角線 BD, CE の交点を M とする。対称性より, 線分 AM は四角形 BCDE を含む平面に垂直であり, 線分 AM と平面 α の交点を I とすると, 線分 BH と線分 FG は点 I で直交する。次に, △ ACE を図に示すと次のようになる。

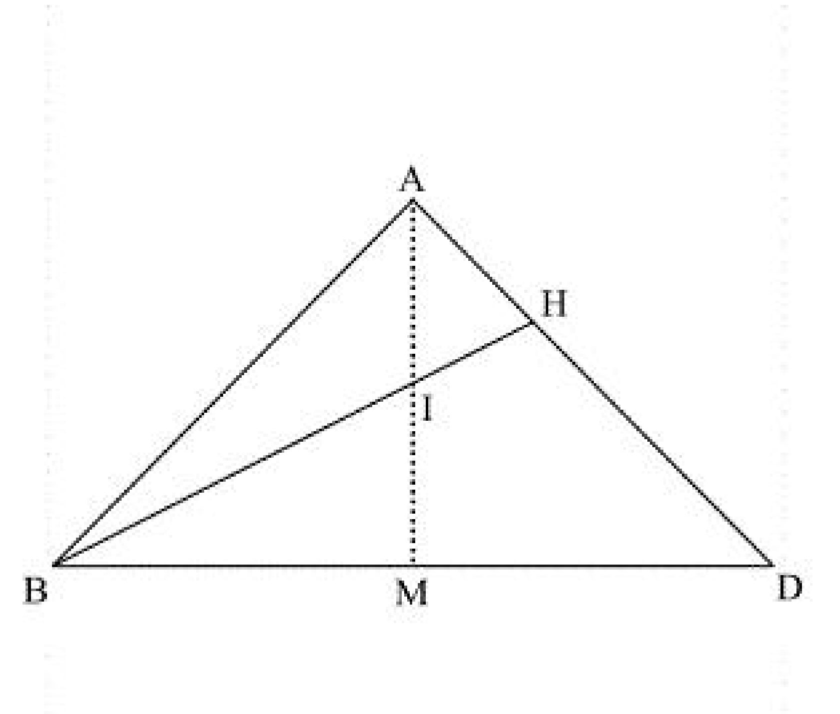


上図の△ AFG, △ ACE において, $AC = 2AF$, $AE = 2AG$ より, △ AFG と△ ACE の相似比は, $1:2$ であるから,

$$FG = \frac{1}{2}CE = \sqrt{2} \quad \cdots ①$$

$$AI : IM = 1:1$$

である。次に, △ ABD を図に示すと次のようになる。



△ AMD と直線 BH にメネラウスの定理を用いると,

$$\frac{AI}{IM} \cdot \frac{MB}{BD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$$

である。したがって,

$$AH = \frac{1}{1+2}AD = \frac{2}{3}$$

である。

(2)

△ ABD において,

$$AB^2 + AD^2 - BD^2 = 2^2 + 2^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$$

が成立するため, 三平方の定理の逆から, $\angle BAD = 90°$ である。ゆえに, △ ABH に三平方の定理を用いて,

$$BH^2 = AB^2 + AH^2 = \frac{40}{9}$$

$$\therefore BH = \frac{2\sqrt{10}}{3} \ (\because BH > 0) \quad \cdots ②$$

が得られる。①, ②より平面 α による四角錐 A-BCDE の断面の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot FG \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

である。

(3)

平面 α によって四角錐が分けられてできた 2 つの立体のうち, 点 D を含む立体の頂点は

B, C, D, E, F, G, H

の 7 つである。この立体の面は

四角形 BCDE, CDHF, DEGH, BFHG

三角形 BCF, EBG

の 6 つである。また, オイラーの多面体定理より辺の数は

$$7 + 6 - 2 = 11$$

である。

(4)

△ ACM について, 三平方の定理より,

$$AM^2 = AC^2 - CM^2 = 2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

$$\therefore AM = \sqrt{2} \ (\because AM > 0)$$

である。ここで△ ABD を含む平面で立体を 2 つに分けて考える。求める体積を V, 四面体 ABFH, ABCD の体積をそれぞれ V_1, V_2 とすると, 対称性より,

$$\begin{aligned} V &= 2 \times V_1 \\ &= 2 \times \left(\frac{AF}{AC} \times \frac{AH}{AD} \times V_2\right) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times V_2 \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times AM \times \frac{1}{2} \times BC \times CD\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。