

【解答】

(1)	ア	イ			
	3	2			
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ
	3	2	4	5	5
(3)	ク	ケ	コ	サ	
	-7	3	23	6	

【解説】

(1)

 C_2 において

$$y' = 2x - 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、 C_2 上の点 $(t, t^2 - 8t + 17)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y = (2t - 8)(x - t) + t^2 - 8t + 17$$

となる。この直線が点 $(a, -a^2 + 3)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} -a^2 + 3 &= (2t - 8)(a - t) + t^2 - 8t + 17 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2at - a^2 + 8a - 14 &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たす。②を t の2次方程式と見て、その判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-a^2 + 8a - 14) = 2(a - 2)^2 + 6 > 0$$

となるから、②は異なる2つの実数解を持つ。その解を t_1, t_2 とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2a \\ t_1 t_2 = -a^2 + 8a - 14 \end{cases}$$

を満たす。ここで、 $x = t_1, t_2$ における C_2 の接線は直交するから、①より

$$\begin{aligned} (2t_1 - 8)(2t_2 - 8) &= -1 \\ \Leftrightarrow 4t_1 t_2 - 16(t_1 + t_2) + 65 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(-a^2 + 8a - 14) - 16 \cdot 2a + 65 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 9 &= 0 \\ \therefore a &= \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 a のとり得る値のうち最大のものは $\frac{3}{2}$ である。また、 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ である。

(2)

 C_1 において

$$y' = -2x$$

であるから、点 $B(1, 2)$ における C_1 の接線の傾きは -2 である。よって、接線 ℓ の傾きも -2 であるから、①より点 P の x 座標は

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= -2 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

となる。また、 y 座標は $y = 3^2 - 8 \cdot 3 + 17 = 2$ であるから、 P の座標は $(3, 2)$ と求まる。これより、接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2(x - 3) + 2 \\ \Leftrightarrow 2x + y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

である。点と直線の距離公式より

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 2 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

と求まる。

(3)

(1), (2)の結果を用いると、直線 PA の方程式は

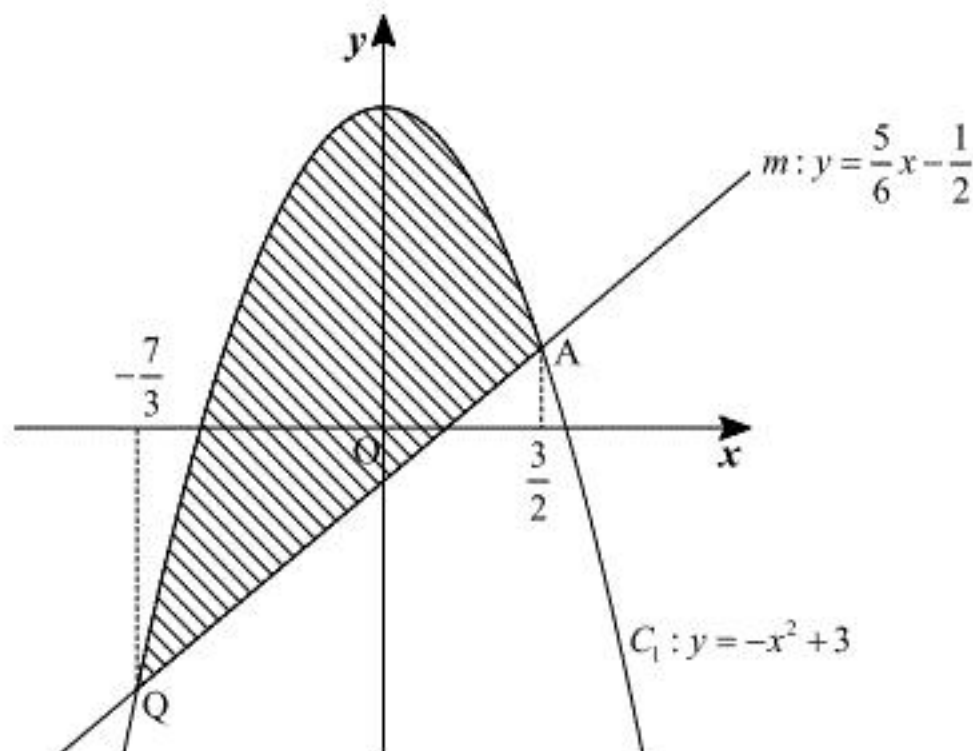
$$\begin{aligned} y &= \frac{2 - \frac{3}{4}}{3 - \frac{3}{2}}(x - 3) + 2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5}{6}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。この式と C_1 の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{5}{6}x - \frac{1}{2} &= -x^2 + 3 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{7}{3}\right) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{2}, -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

となるから、点 Q の x 座標は $-\frac{7}{3}$ である。よって、直線 m の方程式は $y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$ である。以下

に、直線 m と放物線 C_1 を図示し、 m と C_1 で囲まれた図形を斜線部で示す。



斜線部の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{7}{3}}^{\frac{3}{2}} \left\{ -x^2 + 3 - \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx &= -\int_{-\frac{7}{3}}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{7}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \times \left\{ \frac{3}{2} - \left(-\frac{7}{3} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{23}{6} \right)^3 \end{aligned}$$

である。

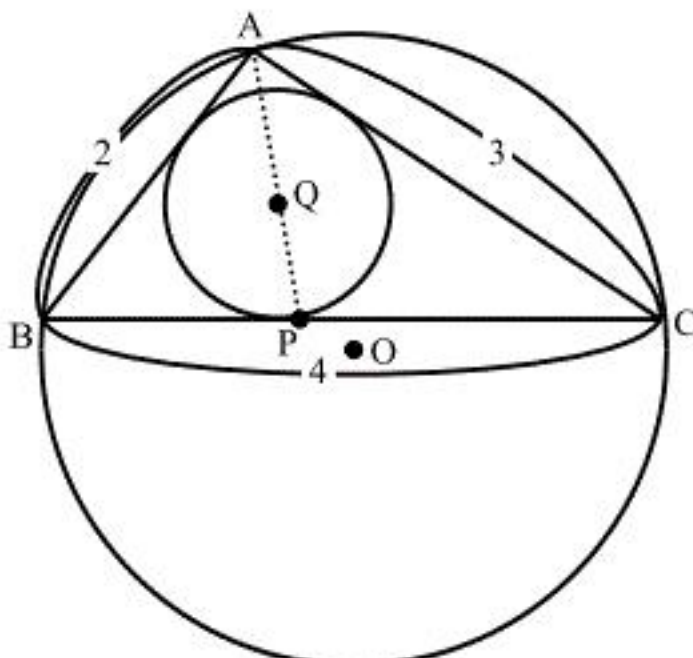
【解答】

(1)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
	-3	2	3	4	15	15	6	8	15	15
(2)	ニ	ヌ	ネ	ノ						
	3	5	2	5						
(3)	ハ	ヒ	フ	ヘ						
	1	3	2	9						
(4)	ホ	マ	ミ	ム						
	11	15	28	45						

【解説】

(1)

以下に、 $\triangle ABC$ および外心 O 、内心 Q 、点 P を図示する。



$\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle A = \frac{4+9-16}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle A = -\frac{1}{4}$$

となる。また、 $0 < \angle A < \pi$ より $\sin \angle A > 0$ であるから、 $\sin \angle A = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ となる。よって、

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle A = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

であり、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3}{4} \sqrt{15}$$

である。内接円の半径を r とおくと、 $\triangle ABC$ の面積を利用して、

$$\frac{3}{4} \sqrt{15} = \frac{1}{2} r (AB + BC + CA)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} r (2+3+4)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

となる。外接円の半径を R とおくと、 $\triangle ABC$ において正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

となる。

(2)

直線 AP は $\angle A$ の 2 等分線であるから、

$$AB : AC = BP : PC$$

$$\Leftrightarrow BP : PC = 2 : 3$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

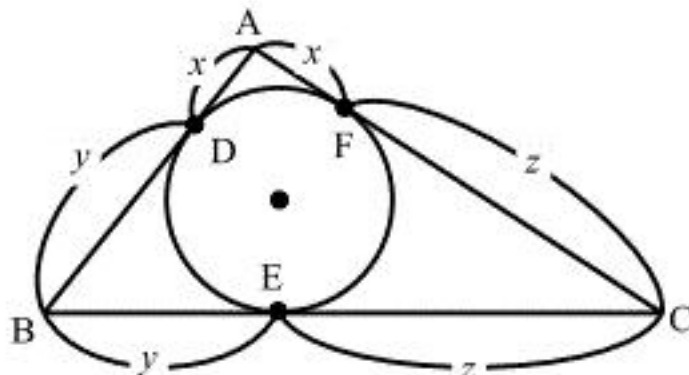
となる。

(3)

内接円の定義より、点 Q は $\angle A$ の 2 等分線である直線 AP 上に存在する。これより、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AQ} = k \overrightarrow{AP}$$

と表せる。内接円と辺 AB , BC , CA の接点をそれぞれ点 D , E , F とすると、以下の図のようになる。



上図より、

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=4 \\ z+x=3 \end{cases}$$

が成り立つから、これより $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = \frac{5}{2}$ である。ここで、三平方の定理より

$$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

であり、(2)より、

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{9}{25}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{25}|\vec{c}|^2 + \frac{12}{25}\vec{b} \cdot \vec{c}} = \frac{3}{5}\sqrt{6}$$

であるから、

$$|\overrightarrow{AQ}| = k |\overrightarrow{AP}|$$

$$\therefore k = \frac{5}{9}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{5}{9} \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

である。

(4)

実数 s, t を用いて $\overrightarrow{AO} = s\vec{b} + t\vec{c}$ とする。ここで、辺 AB , AC の中点をそれぞれ M , N とおくと、

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AN} = s\vec{b} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$

と表せる。ここで、外心の定義より $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NO} \perp \overrightarrow{AC}$ が成り立つから、

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2 + t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8s - 3t = 4$$

・・・①

$$\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow s\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(t - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s - 6t = -3$$

・・・②

が得られる。①、②より $s = \frac{11}{15}$, $t = \frac{28}{45}$ であるから、

$$\overrightarrow{AO} = \frac{11}{15}\vec{b} + \frac{28}{45}\vec{c}$$

となる。

〔解答〕

(1)	ㄨ	ㄢ				
	2	3				
(2)	ㄤ	ㄨ	ㄣ	ㄤ	ㄤ	ㄤ
	2	1	1	2	5	14
(3)	B, C, E, G, J					

〔解説〕

(1)

 $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = p, b_1 = b_2 = b_3 = \dots = q$ であるとする、与式より

$$a_{n+1} = \frac{b_n + 1}{a_n} \Leftrightarrow p^2 = q + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}^3 + 1}{b_n} \Leftrightarrow q^2 = p^3 + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

がそれぞれ成り立つ。①、②から、 q を消去すると、

$$\begin{aligned} (p^2 - 1)^2 &= p^3 + 1 \\ \Leftrightarrow p^4 - 2p^2 + 1 &= p^3 + 1 \\ \Leftrightarrow p^4 - p^3 - 2p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2(p+1)(p-2) &= 0 \\ \therefore p &= 2 \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

となるから、これを①に代入して $q = 3$ を得る。逆に、 $p = 2, q = 3$ のとき、

$$a_2 = 2, b_2 = 3, a_3 = 2, b_3 = 3, \dots$$

と続くことがわかるから、確かに $p = 2, q = 3$ は題意を満たす。

(2)

$p = 1, q = 2$ のとき、 $a_1 = 1, b_1 = 2$ である。これを $a_{n+1} = \frac{b_n + 1}{a_n}, b_{n+1} = \frac{a_{n+1}^3 + 1}{b_n}$ に代入していくと、

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2+1}{1} = 3 \\ b_2 &= \frac{3^3+1}{2} = 14 \\ a_3 &= \frac{14+1}{3} = 5 \\ b_3 &= \frac{5^3+1}{14} = 9 \\ a_4 &= \frac{9+1}{5} = 2 \\ b_4 &= \frac{2^3+1}{9} = 1 \\ a_5 &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ b_5 &= \frac{1^3+1}{1} = 2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a_5 = a_1 = 1, b_5 = b_1 = 2$ であり、 $n = 5$ 以降上記の計算が繰り返されることがわかるから、0以上の整数 α, β 、整数 k, l ($= 1, 2, 3, 4$) を用いると、

$$a_{4\alpha+k} = a_k, b_{4\beta+l} = b_l$$

が成り立つ。したがって、数列 $\{a_n\}$ の項のとり得る値は 1, 3, 5, 2、数列 $\{b_n\}$ の項のとり得る値は 2, 14, 9, 1 であるから、最大値はそれぞれ 5, 14 となる。

(3)

それぞれの選択肢について真偽を判定する。Aについて、(2)より偽である。Bについて、数列 $\{a_n\}$ の項のとり得る値は 1, 3, 5, 2 であるから真である。Cについて、 n の値で場合分けをする。

[1] $n = 4\alpha + 1$ のとき

$a_n = 1, a_{n+1} = 3, a_{n+2} = 5$ であり、これは与式を満たす。

[2] $n = 4\alpha + 2$ のとき

$a_n = 3, a_{n+1} = 5, a_{n+2} = 2$ であり、これは与式を満たす。

[3] $n = 4\alpha + 3$ のとき

$a_n = 5, a_{n+1} = 2, a_{n+2} = 1$ であり、これは与式を満たす。

[4] $n = 4\alpha + 4$ のとき

$a_n = 2, a_{n+1} = 1, a_{n+2} = 3$ であり、これは与式を満たす。

以上[1]～[4]より、Cは真である。Dについて、数列 $\{a_n\}$ の項のとり得る値は 1, 3, 5, 2 でありすべて整数であるから偽である。Eについて、 $r = 4$ とすると $a_{4\alpha+k} = a_k$ より真である。Fについて、(2)より偽である。Gについて、数列 $\{b_n\}$ の項のとり得る値は 2, 14, 9, 1 であるから真である。Hについて、 $n = 4\beta + 1$ のとき $b_n = 2, b_{n+1} = 14, b_{n+2} = 9$ である。このとき、 $b_n b_{n+1} b_{n+2} = 252, b_n + b_{n+1}^2 + b_{n+2} = 207$ であるから、与式は成立しない。したがって、Hは偽である。Iについて、数列 $\{b_n\}$ の項のとり得る値は 2, 14, 9, 1 でありすべて整数であるから偽である。Jについて、 $s = 4$ とすると $a_{4\beta+l} = a_l$ より真である。以上より、正しい選択肢は B, C, E, G, J となる。