

1

【解答】

(1)	ア
	83

(2)	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	2	3	-36	-12	-3	69	2	-56

(3)	コ	サ	シ	ス
	3	8	21	64

【解説】

(1)

ユークリッドの互除法を用いると、

$$50381 = 49883 \times 1 + 498$$

$$49883 = 100 \times 498 + 83$$

$$498 = 83 \times 6$$

となる。よって 50381 と 49883 の最大公約数は 83 である。

(2)

底の変換公式より、

$$\log_{\frac{1}{4}} 16 = -\log_4 4^2 = -2$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 64 = -\log_4 4^3 = -3$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 4096 = -\log_4 4^6 = -6$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 256 = -\log_4 4^4 = -4$$

となる。よって、 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 12$ となる。このとき、

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x+3)(x-2)$$

である。したがって、増減表は次のようになる。ただし、 $f(-3) = 69$ 、 $f(2) = -56$ である。

x	...	-3	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	69	↘	-56	↗

よって、極大値は $x = -3$ のとき、69 である。極小値は $x = 2$ のとき、-56 である。

(3)

$n = 5$ の時、 $r = 3$ となるには左から 2 番目と 5 番目の間で色が 2 回変わればよい。全ての場合の数は 2^5 通りであり、色が変わる場所の選び方は ${}_4C_2 = 6$ 通りである。一番左の石の色は 2 通り

あることに注意すると、求める確率は $\frac{2 \cdot {}_4C_2}{2^5} = \frac{3}{8}$ となる。

続いて、 $n = 7$ のときも同様に考える。条件を満たす r は、 $r = 3, 6$ の 2 通りある。

[1] $r = 3$ のとき

このときの確率は $\frac{2 \cdot {}_6C_2}{2^7} = \frac{15}{64}$ となる。

[2] $r = 6$ のとき

このときの確率は $\frac{2 \cdot {}_6C_5}{2^7} = \frac{6}{64}$ となる。

よって、求める確率は、 $\frac{15}{64} + \frac{6}{64} = \frac{21}{64}$ である。

2

【解答】

(1)	セ	ソ	タ
	4	8	3

(2)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	8	4	2	1	2	-1

【解説】

- (1) 与えられた2つの放物線の式から y を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 - 2a &= -(x-a)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - 2a &= 0 \end{aligned}$$

となる。2つの放物線が共有点を持つことと、上の2次方程式が実数解をもつことは同値であるから、上の2次方程式の判別式を D とすると求める条件は $D \geq 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2(a^2 - 2a) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + 4a &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a(a-4) &\leq 0 \end{aligned}$$

となる。 a は正の実数であるから、求める範囲は $0 < a \leq 4$ である。

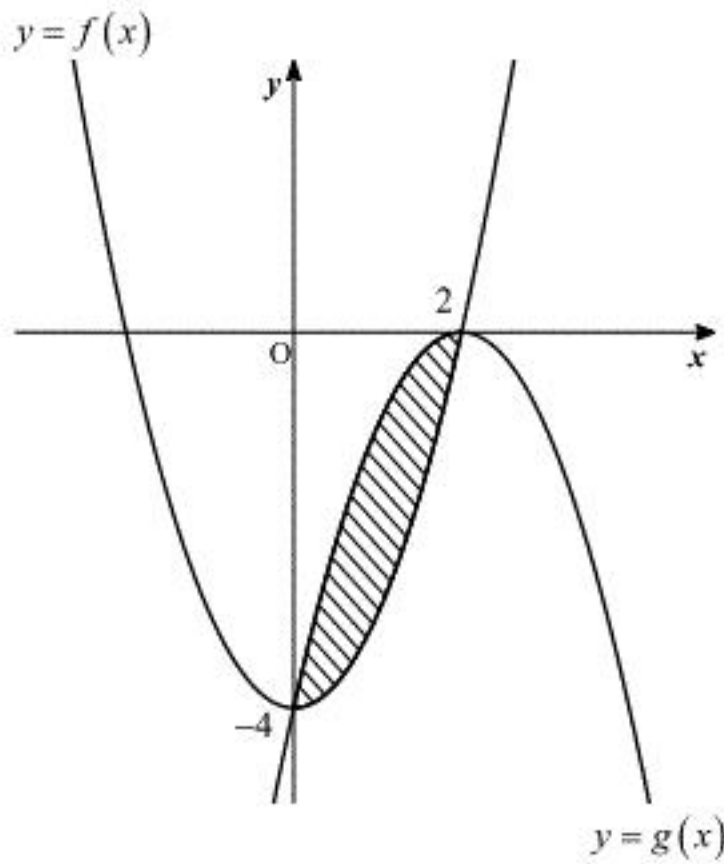
また、 $a=2$ のとき

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 \\ g(x) = -(x-2)^2 \end{cases}$$

となる。 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= -(x-2)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

より、 $x=0, 2$ である。



従って、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \{-(x-2)^2 - (x^2 - 4)\} dx \\ &= -2 \int_0^2 x(x-2) dx \\ &= -2 \left(-\frac{1}{6} \right) (2-0)^3 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

(i)

$a=8$ のとき

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 16 \\ g(x) = -(x-8)^2 = -x^2 + 16x - 64 \end{cases}$$

である。 $y=f(x)$ 上の接点 $(t, t^2 - 16)$ における接線の方程式は、 $f'(x)=2x$ より

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 - 16 \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 - 16 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。一方、 $y=g(x)$ 上の接点 $(s, -s^2 + 16s - 64)$ における接線の方程式は、 $g'(x)=-2x+16$

より

$$\begin{aligned} y &= (-2s+16)(x-s) - s^2 + 16s - 64 \\ \Leftrightarrow y &= (-2s+16)x + s^2 - 64 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共通接線を持つとき①と②から次の2式が成立する。

$$\begin{cases} 2t = -2s + 16 \\ -t^2 - 16 = s^2 - 64 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \textcircled{3} \\ \dots \textcircled{4} \end{matrix}$$

③より $t=-s+8$ となり、これを④に代入して

$$\begin{aligned} -(-s+8)^2 - 16 &= s^2 - 64 \\ s^2 - 8s + 8 &= 0 \\ \therefore s &= 4 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。従って、小さい方の傾きは

$$-2s+16 = -2(4+2\sqrt{2})+16 = 8-4\sqrt{2}$$

である。

(ii)

(i)と同様に考えると、 $y=f(x)$ 上の接点 $(t, t^2 - 2a)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 - 2a \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 - 2a \end{aligned} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。また、 $y=g(x)$ 上の接点 $(s, -s^2 + 2sa - a^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (-2s+2a)(x-s) - s^2 + 2sa - a^2 \\ \Leftrightarrow y &= (-2s+2a)x + s^2 - a^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{6}$$

である。 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共通接線を持つとき⑤と⑥から次の2式が成立する。

$$\begin{cases} 2t = -2s + 2a \\ -t^2 - 2a = s^2 - a^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \textcircled{7} \\ \dots \textcircled{8} \end{matrix}$$

⑦より $t=-s+a$ となり、これを⑧に代入して

$$\begin{aligned} -(-s+a)^2 - 2a &= s^2 - a^2 \\ \Leftrightarrow s^2 - as + a &= 0 \end{aligned}$$

となる。この2次方程式の2解を α, β ($\alpha \neq \beta$) とすると解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = a \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \textcircled{9} \\ \dots \textcircled{10} \end{matrix}$$

となる。⑥に $s=\alpha, \beta$ を代入して

$$\begin{cases} y = (-2\alpha+2a)x + \alpha^2 - a^2 \\ y = (-2\beta+2a)x + \beta^2 - a^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \textcircled{11} \\ \dots \textcircled{12} \end{matrix}$$

となる。共通接線の交点の x 座標は、⑨と $\alpha \neq \beta$ を用いて⑪-⑫から

$$\begin{aligned} 0 &= -2(\alpha - \beta)x + \alpha^2 - \beta^2 \\ \Leftrightarrow 2(\alpha - \beta)x &= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\because \alpha \neq \beta) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

となる。一方、 y 座標は⑨と⑩を用いて⑪+⑫から

$$\begin{aligned} 2y &= \{-2(\alpha + \beta) + 4a\}x + \alpha^2 + \beta^2 - 2a^2 \\ \Leftrightarrow 2y &= \{-2(\alpha + \beta) + 4a\}x + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2a^2 \\ \Leftrightarrow 2y &= 2ax + a^2 - 2a - 2a^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $x=\frac{a}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned} 2y &= -2a \\ \Leftrightarrow y &= -a \end{aligned}$$

となる。

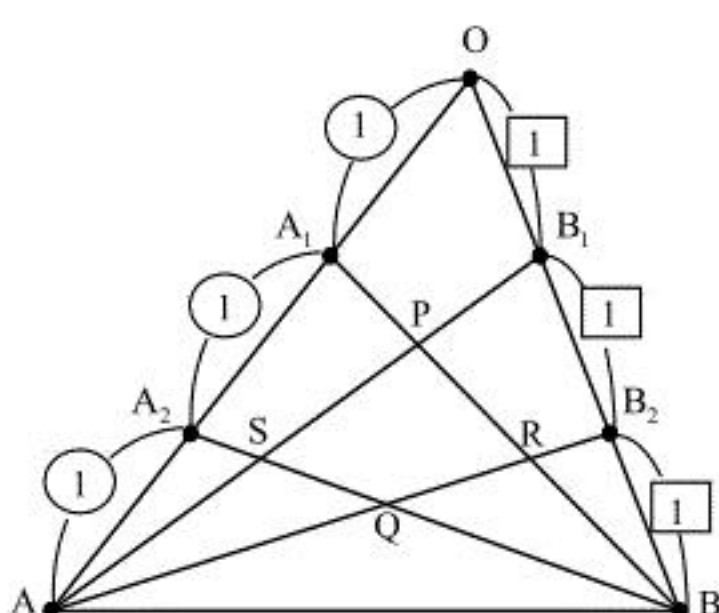
【解答】

(1)	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ
	1	4	1	4	2	5	2	5	1	7	4	7

(2)	モ	ヤ	ユ	ヨ
	9	35	1	2

【解説】

(1)



$\triangle OA_1B$ と直線 AB_1 にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{OA}{AA_1} \times \frac{A_1P}{PB} \times \frac{BB_1}{B_1O} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1P}{PB} = \frac{1}{3}$$

となる。よって、 $A_1P:PB=1:3$ である。従って、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

となる。

次に、 $\triangle OA_2B$ と直線 AB_2 にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{OA}{AA_2} \times \frac{A_2Q}{QB} \times \frac{BB_2}{B_2O} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_2Q}{QB} = \frac{2}{3}$$

となる。よって $A_2Q:QB=2:3$ である。従って

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA_2} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

となる。

さらに、 $\triangle OA_1B$ と直線 AB_2 にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{OA}{AA_1} \times \frac{A_1R}{RB} \times \frac{BB_2}{B_2O} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1R}{RB} = \frac{4}{3}$$

となる。よって $A_1R:RB=4:3$ である。従って

$$\overrightarrow{OR} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OA_1} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$$

となる。

(2)

$\triangle OA_2B$ と直線 AB_1 にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{OA}{AA_2} \times \frac{A_2S}{SB} \times \frac{BB_1}{B_1O} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_2S}{SB} = \frac{1}{6}$$

となる。よって $A_2S:SB=1:6$ となる。従って、 $OA:A_1A_2=3:1$, $A_2S:SB=1:6$, $A_1P:PB=1:3$ より

$$\triangle BPS = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} \times \triangle OAB = \frac{3}{14} \triangle OAB$$

となる。また、 $OA:A_1A_2=3:1$, $A_1R:RB=4:3$, $A_2Q:QB=2:3$ より

$$\triangle BRQ = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} \times \triangle OAB = \frac{3}{35} \triangle OAB$$

となる。よって、

$$\text{四角形 PRQS} = \triangle BPS - \triangle BRQ = \frac{9}{70} \triangle OAB$$

となる。すなわち、 $\triangle OAB$ の面積が最大となるとき、四角形 PRQS の面積も最大になる。

$\triangle OAB$ の面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \angle AOB = 2 \sin \angle AOB$$

であるから、 $\angle AOB = \frac{1}{2}\pi$ のとき、四角形 PRQS の面積は最大値 $\frac{9}{35}$ をとる。