

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	2	2	15	6	35	2
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	69	6	23	7	69	6

【解説】

(1)

$\overline{OP} = (x_1, -1, z_1)$ とする。 $OA \perp OP$, $OB \perp OP$ を満たすから、

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \overline{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow -x_1 - 2 + 2\sqrt{2}z_1 &= 0 \\ \overline{OB} \cdot \overline{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 + \sqrt{2}z_1 &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。この2式より $x_1 = 2$, $z_1 = \sqrt{2}$ が成り立つから、 $\overline{OP} = (2, -1, \sqrt{2})$ となる。よって、

求める点 P の座標は $(2, -1, \sqrt{2})$ である。また、

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = (1, 0, -\sqrt{2}) \\ \overline{AP} &= \overline{OP} - \overline{OA} = (3, -3, -\sqrt{2})\end{aligned}$$

であるから、内積の定義より、

$$\begin{aligned}\cos \angle BAP &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AP}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AP}|} \\ &= \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot (-3) + (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2})}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{20}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{6}\end{aligned}$$

とわかる。また、

$$\begin{aligned}\triangle ABP &= \frac{1}{2} \sqrt{(|\overline{AB}| \cdot |\overline{AP}|)^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{3} \cdot \sqrt{20})^2 - 5^2} \\ &= \frac{\sqrt{35}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$\overline{OQ} = (x_2, y_2, z_2)$ とおく。 $AQ = BQ$ より、

$$\begin{aligned}AQ &= BQ \\ \Leftrightarrow AQ^2 &= BQ^2 \\ \Leftrightarrow (x_2 + 1)^2 + (y_2 - 2)^2 + (z_2 - 2\sqrt{2})^2 &= x_2^2 + (y_2 - 2)^2 + (z_2 - \sqrt{2})^2 \\ \Leftrightarrow 2x_2 - 2\sqrt{2}z_2 + 7 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $OQ = \sqrt{6}$ より、

$$\begin{aligned}OQ &= \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow OQ^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 6 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、①を②に代入して、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}z_2 - \frac{7}{2}\right)^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow 3z_2^2 - 7\sqrt{2}z_2 + y_2^2 + \frac{25}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\left(z_2 - \frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2 + y_2^2 &= \frac{23}{12}\end{aligned}$$

を得る。 y_2, z_2 は実数であるから、 $y_2^2 \geq 0$, $\left(z_2 - \frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2 \geq 0$ と上の式より、

$$\begin{aligned}0 &\leq y_2^2 \leq \frac{23}{12} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{23}{12}} &\leq y_2 \leq \sqrt{\frac{23}{12}} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{69}}{6} &\leq y_2 \leq \frac{\sqrt{69}}{6} \\ 0 &\leq 3\left(z_2 - \frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2 \leq \frac{23}{12} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{23}{36}} &\leq z_2 - \frac{7\sqrt{2}}{6} \leq \sqrt{\frac{23}{36}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(7\sqrt{2} - \sqrt{23}) &\leq z_2 \leq \frac{1}{6}(7\sqrt{2} + \sqrt{23})\end{aligned}$$

とわかる。したがって y_2, z_2 の最大値、すなわち点 Q の y 座標、 z 座標の最大値はそれぞれ

$\frac{\sqrt{69}}{6}, \frac{1}{6}(\sqrt{23} + 7\sqrt{2})$ となる。また、点 Q の軌跡は①、②の交線、すなわち原点を中心とした半

径 $\sqrt{6}$ の球と、平面 $2x - 2\sqrt{2}z + 7 = 0$ の交線である。球の中心と平面の距離は、平面と点の距離

の公式より、

$$\frac{|2 \cdot 0 - 2\sqrt{2} \cdot 0 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{2})^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

である。ここで、球の中心から平面に下ろした垂線の足が点 Q の軌跡の円の中心となることに注意すると、三平方の定理より

$$(\text{円の半径})^2 + (\text{円の中心と球の中心の距離})^2 = (\text{球の半径})^2$$

が成り立つため、円の半径を r とすれば、

$$\begin{aligned}r^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2 &= (\sqrt{6})^2 \\ \Leftrightarrow r^2 &= \frac{23}{12} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{69}}{6}\end{aligned}$$

とわかる。

【解答】

(1)	B, C					
(2)	あ	い	う	え	お	
	C	A	B	D	C	
(3)	か	き	く	け	こ	さ
	B	A	A	C	D	D

【解説】

(1)

A: $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ より p を満たさない。B: $N=4$ とすると、 $n \geq N$ となる n に対して

$$\frac{8}{n} \leq \frac{8}{N} = \frac{8}{4} = 2$$

となるので、 p を満たす。C: $N=3$ とすると、 $n \geq N$ となる n に対して

$$(-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right) \leq \left|(-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right)\right| \leq 1 + \frac{3}{n} \leq 1 + \frac{3}{N} = 1 + \frac{3}{3} = 2$$

となるので、 p を満たす。D: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n) = \infty$ となるので、 p を満たさない。E: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - 2 + \frac{1}{n+2}\right) = \infty$ となるので、 p を満たさない。F: $3\sin n$ が p を満たすと仮定する。つまり、「 $n \geq N$ となる n に対して $3\sin n \leq 2$ 」となるような N が存在する。このとき、 k を $\frac{N}{2\pi}$ 以上の整数とし、 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ に最も近い自然数の1つを n とすると、 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \frac{1}{2}$ であり、 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{1}{2} \geq \frac{\pi}{2} + N - \frac{1}{2} > N$ より $n > N$ も成り立つ。このとき、特に $\frac{\pi}{4} > \frac{1}{2}$ であるので

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{4} < n < \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

が成立する。よって、

$$\sin n > \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin n > 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ここで、

$$3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{3}{2}(1.4) = 2.1 > 2$$

であるので、 $3\sin n > 2$ となるので仮定の $3\sin n \leq 2$ に矛盾する。よって、 p を満たさない。

(2)

(i)

「 $q_1 \Rightarrow p$ 」について q_1 が成立するとき $N=1$ とすると $n \geq N$ となる n に対して $a_n \leq 2$ が成立するので、真である。「 $p \Rightarrow q_1$ 」について反例として、 $a_1=3, a_n=2$ ($n \geq 2$) が考えられるので、偽である。よって、 q_1 は p であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(ii)

「 $q_2 \Rightarrow p$ 」について集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が空集合の場合、すべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ が成り立つ。また、集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が有限集合の場合、この集合の中で最大となる n を $n = N_{\max}$ とすると、 $n \geq N_{\max} + 1$ なるすべての n に対して、 $a_n \leq 2$ が成り立つ。したがって真である。「 $p \Rightarrow q_2$ 」について $n \geq N$ となる n に対して $a_n \leq 2$ であるので、これらは集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ に含まれない。したがってこの集合は $\{1, 2, \dots, N-1\}$ に含まれるから空集合または有限集合である。これより真である。よって、 q_2 は p であるための必要十分条件である。

(iii)

「 $q_3 \Rightarrow p$ 」について反例として $a_n = 2 + (-1)^n$ が考えられるので、偽である。「 $p \Rightarrow q_3$ 」について $n \geq N$ となるすべての n が集合 $\{n | a_n \leq 2, n \text{ は自然数}\}$ の要素となるので真である。よって、 q_3 は p であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(iv)

「 $q_4 \Rightarrow p$ 」について反例として $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ が考えられるので、偽である。「 $p \Rightarrow q_4$ 」について反例として $a_n = 1$ が考えられるので、偽である。よって、 q_4 は p であるための必要条件でも十分条件でもない。

(v)

「 $q_5 \Rightarrow p$ 」について $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ より、 N 以上のすべての自然数 n に対して $|a_n - 1| \leq 1$ となる N が存在する。

$$|a_n - 1| \leq 1 \Rightarrow a_n \leq 2$$

より、 p が成り立つ。「 $p \Rightarrow q_5$ 」について反例として $a_n = 0$ が考えられるので、偽である。よって、 q_5 は p であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(3)

 p の否定を考えると $\bar{p}$: すべての自然数 N に対して、「 $a_n > 2$ となる N 以上の整数 n が存在する。」

である。

(i)

「 $r_1 \Rightarrow \bar{p}$ 」について対偶「『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ 』が成り立つような自然数 N が存在するならば、すべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ である」を考える。(2)(i)より、これは偽であるから、命題「 $r_1 \Rightarrow \bar{p}$ 」も偽である。「 $\bar{p} \Rightarrow r_1$ 」について対偶「すべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ であるならば『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ 』が成り立つような自然数 N が存在する」を考える。(2)(i)より、この命題は真であるから、命題「 $\bar{p} \Rightarrow r_1$ 」も真である。よって、 r_1 は $\bar{p}$ であるための必要条件であるが十分条件でない。

(ii)

「 $r_2 \Rightarrow \bar{p}$ 」について対偶「『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ 』が成り立つような自然数 N が存在するならば、集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ は空集合または有限集合である」を考える。(2)(ii)より、これは真であるから、命題「 $r_2 \Rightarrow \bar{p}$ 」も真である。「 $\bar{p} \Rightarrow r_2$ 」について対偶「集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ は空集合または有限集合であるならば、『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ 』が成り立つような自然数 N が存在する」を考える。(2)(ii)より、これは真であるから、命題「 $\bar{p} \Rightarrow r_2$ 」も真である。よって、 r_2 は $\bar{p}$ であるための必要十分条件である。

(iii)

集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ は空集合でなく、かつ、この集合に最大の要素が存在しないことと集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が無限集合であることは同値である。よって、 r_3 は $\bar{p}$ であるための必要十分条件である。

(iv)

「 $r_4 \Rightarrow \bar{p}$ 」について命題「 $r_4 \Rightarrow r_2$ 」を考える。 r_4 が成り立つとき、 N 以上のすべての自然数は集合 $\{n | a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ の要素であるから、この集合は無限集合となる。したがってこの命題は真であり、これと(3)(ii)を合わせると、 $r_4 \Rightarrow r_2 \Rightarrow \bar{p}$ が成り立つので、命題「 $r_4 \Rightarrow \bar{p}$ 」も真である。「 $\bar{p} \Rightarrow r_4$ 」について反例として $a_n = 3(-1)^n$ が考えられるので、偽である。よって、 r_4 は $\bar{p}$ であるための十分条件であるが必要条件でない。

(v)

「 $r_5 \Rightarrow \bar{p}$ 」について反例として $a_n = 2$ が考えられるので、偽である。「 $\bar{p} \Rightarrow r_5$ 」について反例として $a_n = 3$ が考えられるので、偽である。よって、 r_5 は $\bar{p}$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

(vi)

「 $r_6 \Rightarrow \bar{p}$ 」について反例として、 $a_1=3, a_n=2$ ($n \geq 2$) が考えられるので、偽である。「 $\bar{p} \Rightarrow r_6$ 」について反例として $a_1=2, a_n=3$ ($n \geq 2$) が考えられるので、偽である。よって、 r_6 は $\bar{p}$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

【解答】

(1)	$\boxed{\text{ズ}}$	
	7	
(2)	$\boxed{\text{セ}}$	$\boxed{\text{ソ}}$
	-3	8
(3)	$\boxed{\text{タ}}$	
	6	
(4)	$\boxed{\text{チ}}$	
	4	
(5)	$\boxed{\text{ツ}}$	
	50	

【解説】

(1)

$$2^7 = 128, 3^5 = 243, 2^8 = 256 \text{ より}$$

$$2^7 < 3^5 < 2^8$$

である。各辺で底を 2 とした対数をとっても不等号の向きは変わらず

$$7 < 5\log_2 3 < 8$$

$$\Leftrightarrow 7 < 5\alpha < 8$$

となる。よって、

$$a_5 = [5\alpha] = 7$$

と求まる。

(2)

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{\log_2 3}{\log_2 3-1} = \frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 3$$

と表せるから、

$$b_3 = \left\lceil 3\log_{\frac{3}{2}} 3 \right\rceil = \left\lceil \log_{\frac{3}{2}} 3^3 \right\rceil$$

となる。したがって、 $b_3 = k$ とおくと

$$k \leq \log_{\frac{3}{2}} 3^3 < k+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 3^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \left(\because \frac{3}{2} > 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{k-3}}{2^k} \leq 1 < \frac{3^{k+1-3}}{2^{k+1}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。したがって、 $c = -3$ である。ここで、 $f(k) = \frac{3^{k-3}}{2^k} (k=1, 2, \dots)$ とおくと、 $f(k)$ は

k について単調増加する。また、 $\textcircled{1}$ は

$$f(k) \leq 1 < f(k+1)$$

と表される。したがって

$$f(8) = \frac{3^5}{2^8} = \frac{243}{256} = 0.94\dots$$

$$f(9) = \frac{3^6}{2^9} = \frac{729}{512} = 1.42\dots$$

より、 $\textcircled{1}$ を満たす k は $k=8$ に限られる。以上の議論より、求める値は $b_3 = 8$ である。

(3)

$$a_n \leq 10$$

$$\Leftrightarrow [n\alpha] \leq 10$$

$$\Leftrightarrow n\alpha < 11$$

$$\Leftrightarrow \log_2 3^n < 11$$

$$\Leftrightarrow 3^n < 2^{11}$$

$$\Leftrightarrow 3^n < 2048$$

となる。 $3^6 = 729, 3^7 = 2187$ より、これを満たす自然数 n は $n=1, 2, \dots, 6$ の 6 個である。

(4)

$$b_n \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \left\lceil \frac{n\alpha}{\alpha-1} \right\rceil \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\alpha}{\alpha-1} < 11$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}} 3^n < 11$$

$$\Leftrightarrow 3^n < \left(\frac{3}{2}\right)^{11}$$

$$\Leftrightarrow 2^{11} < 3^{11-n}$$

$$\Leftrightarrow 2048 < 3^{11-n}$$

となる。(3)と同様に、 $3^6 = 729, 3^7 = 2187$ より、これを満たす自然数 n は $n=1, 2, \dots, 4$ の 4 個である。

(5)

$$a_n \leq 50$$

$$\Leftrightarrow [n\alpha] \leq 50$$

$$\Leftrightarrow n\alpha < 51$$

$$\Leftrightarrow \log_2 3^n < 51$$

$$\Leftrightarrow 3^n < 2^{51}$$

であり、

$$b_n \leq 50$$

$$\Leftrightarrow \left\lceil \frac{n\alpha}{\alpha-1} \right\rceil \leq 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\alpha}{\alpha-1} < 51$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}} 3^n < 51$$

$$\Leftrightarrow 3^n < \left(\frac{3}{2}\right)^{51}$$

$$\Leftrightarrow 2^{51} < 3^{51-n}$$

である。 $3^n < 2^{51}$ を満たす n が $1, 2, \dots, s$ の s 個であり、 $2^{51} < 3^{51-n}$ を満たす n が $1, 2, \dots, t$ の t 個であるから、 s, t についての条件式

$$\begin{cases} 3^s < 2^{51} < 3^{s+1} \\ 3^{50-t} < 2^{51} < 3^{51-t} \end{cases}$$

を得る。したがって、

$$s = 50 - t$$

$$\therefore s + t = 50$$

となる。

【解説】

(1)	ア	ト	ナ	ニ	メ	不
	-1	4	-4	1	8	-4
(2)	ノ	ハ				
	9	8				
(3)	ヒ	フ	ヘ			
	-1	2	0			
(4)	ホ	マ				
	4	3				
(5)	ミ	ム	メ			
	4	4	-8			

【解説】

(1)

放物線 C は原点を通るため、実数 $a, b(a \neq 0)$ を用いて、

$$y = ax^2 + bx$$

と表せる。このとき、放物線 C の頂点の座標は、

$$y = ax^2 + bx \\ \Leftrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

より、 $A\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ と表せる。また、 $y = ax^2 + bx$ の導関数は、 $y' = 2ax + b$ である。ここで、

放物線 C と直線 $\ell: y = -x + 2$ は x 座標が $t(t > 0)$ である点で接することから、

$$\begin{cases} at^2 + bt = -t + 2 \\ 2at + b = -1 \end{cases}$$

が成立する。これを、 a, b についての連立方程式とみて解くと、

$$(a, b) = \left(-\frac{2}{t^2}, \frac{4-t}{t}\right)$$

が得られる。これを $A\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ に代入すると、

$$A\left(-\frac{1}{4}t(t-4), \frac{1}{8}(t-4)^2\right)$$

が得られる。

(2)

放物線 C は、

$$y = ax^2 + bx \\ \Leftrightarrow y = ax\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

と、 $a \neq 0$ より、 x 軸と $x = 0, -\frac{b}{a}$ の2点で交わる。 $0 < t < 4$ のとき、(1)より、

$$a = -\frac{2}{t^2} < 0, b = \frac{4-t}{t} > 0$$

であるから、 $-\frac{b}{a} > 0$ である。よって、放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とおくと、

$$S(t) = \int_0^{-\frac{b}{a}} ax\left(x + \frac{b}{a}\right) dx \\ = -\frac{a}{6}\left(-\frac{b}{a}\right)^3 \\ = \frac{b^3}{6a^2} \\ = \frac{t(4-t)^3}{24}$$

と表せる。したがって、以下では $0 < t < 4$ の範囲における $S(t)$ の最大値を考える。

$$S'(t) = \frac{(4-t)^3}{24} - \frac{t(4-t)^2}{8} \\ = \frac{(4-t)^2\{(4-t)-3t\}}{24} \\ = \frac{(4-t)^2(1-t)}{6}$$

より、 $S(t)$ の $0 < t < 4$ の範囲における増減表は、以下のようになる。

t	(0)	...	1	...	(4)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	極大	↘	

上表より、求める面積の最大値は、 $S(1) = \frac{9}{8}$ である。

(3)

曲線 D は、 t が正の実数を動くときの点 $A\left(-\frac{1}{4}t(t-4), \frac{1}{8}(t-4)^2\right)$ の軌跡である。曲線 D の接

線のうち、接点が第2象限にあるものは、曲線 D 上の点 $P\left(-\frac{1}{4}t(t-4), \frac{1}{8}(t-4)^2\right)$ で、

$$t > 0 \text{ かつ } -\frac{1}{4}t(t-4) < 0 \text{ かつ } \frac{1}{8}(t-4)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4 < t$$

を満たすものを接点とするものである。ここで、点 $P(x, y)$ での接線の傾き k は、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ = \frac{d/dt\left(\frac{1}{8}(t-4)^2\right)}{d/dt\left(-\frac{1}{4}t(t-4)\right)} \\ = \frac{t-4}{4} \cdot \frac{2}{2-t} \\ = \frac{t-4}{2(2-t)} \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t-2} - 1\right)$$

で表される。 $t > 4$ において、

$$0 < \frac{2}{t-2} < 1$$

であるから、 k の値域は、

$$-\frac{1}{2} < k < 0$$

である。

(4)

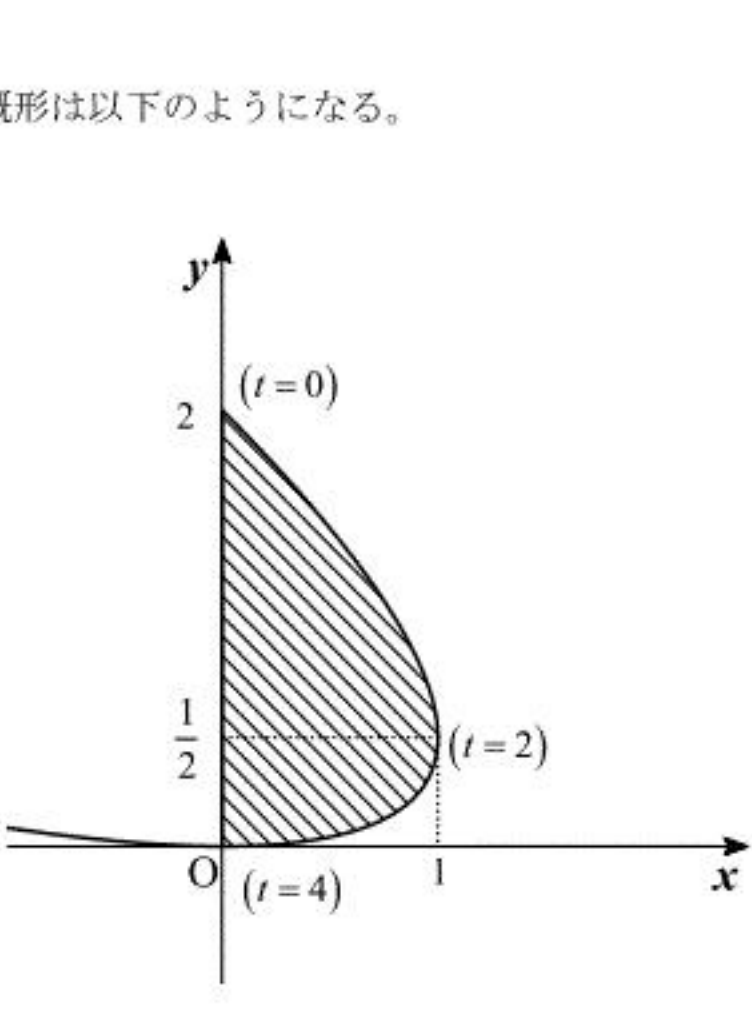
(3)より、点 $A(x, y)$ について、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2-t}{2} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{t-4}{4} \end{cases}$$

であるから、 $0 < t$ での曲線 D の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	2	...	4	...
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-		-
x	(0)	→	1	←	0	←
$\frac{dy}{dt}$		-		-	0	+
y	(2)	↓	$\frac{1}{2}$	↓	0	↑

上表より、曲線 D の概形は以下のようになる。



求める面積は曲線の $t = 0$ から $t = 4$ の部分と、 y 軸で囲まれた部分の面積、すなわち上図の斜線部分の面積である。ここで、求める面積を S とおくと、

$$S = \int_0^2 x dy \\ = \int_4^0 x \cdot \frac{dy}{dt} dt \\ = \int_4^0 \frac{t(4-t)}{4} \cdot \frac{t-4}{4} dt \\ = \frac{1}{16} \int_4^0 \{-4(t-4)^2 - (t-4)^3\} dt \\ = \frac{1}{16} \left[-4 \cdot \frac{(t-4)^3}{3} - \frac{(t-4)^4}{4} \right]_4^0 \\ = \frac{1}{16} \left(\frac{256}{3} - \frac{256}{4} \right) \\ = \frac{4}{3}$$

である。

(5)

(1)より、点 $A(x, y)$ は、

$$\begin{cases} x = -\frac{t(t-4)}{4} \\ y = \frac{(t-4)^2}{8} \end{cases}$$

を満たす。ここで、

$$x + 2y = \frac{t-4}{4} \{-t + (t-4)\} \\ = -(t-4)$$

であるから、両辺を2乗することで、

$$(x + 2y)^2 = \{-(t-4)\}^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 = (t-4)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 - 8y = 0$$

が、 t によらず成り立つことがわかる。