

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	-2	-5	4
(2)	エ		
	-14		
(3)	オ		
	67		
(4)	C, F, H, I		

〔解説〕

(1)

整式 $P(x)$ の3次の項の係数が2であることから、 $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの商を $2x + a$ とすると、余りは $7x + 4$ であるため、

$$P(x) = (2x + a)(x^2 - x - 6) + 7x + 4$$

となる。剰余の定理より $P(-1) = 5$ となるから、

$$\begin{aligned} P(-1) &= 5 \\ \Leftrightarrow (-2 + a)(1 + 1 - 6) - 7 + 4 &= 5 \\ \therefore a &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x(x^2 - x - 6) + 7x + 4 \\ &= 2x^3 - 2x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 \log_3 \frac{n^7}{(n+1)^7} &= \sum_{n=1}^8 7 \log_3 \frac{n}{n+1} \\ &= 7 \log_3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \right) \\ &= 7 \log_3 \frac{1}{9} \\ &= -14 \end{aligned}$$

となる。

(3)

31は素数であるため、2019!に含まれる素因数31の個数を求めればよい。

$2019 = 2 \cdot 31^2 + 97$, $2019 = 65 \cdot 31 + 4$ より、2019!は31でちょうど $65 + 2 = 67$ 回割り切れる。よって、 $n = 67$ となる。

(4)

Aについて、複素数の定義より、複素数全体の集合は実数全体の集合と虚数全体の集合を合わせたものであるため正しくない。

Bについて、複素数の定義より正しくない。

Cについて、複素数の定義より正しい。

Dについて、虚数 $\alpha = 1 + i$ の2乗は $\alpha^2 = 2i$ であるため正しくない。

Eについて、虚数 $\alpha = i$, $\beta = -i$ の和は $\alpha + \beta = 0$ であるため正しくない。

Fについて、複素数の定義より正しい。

Gについて、虚数 $\alpha = i$, $\beta = -i$ の積は $\alpha\beta = 1$ であるため正しくない。

Hについて、複素数の定義より正しい。

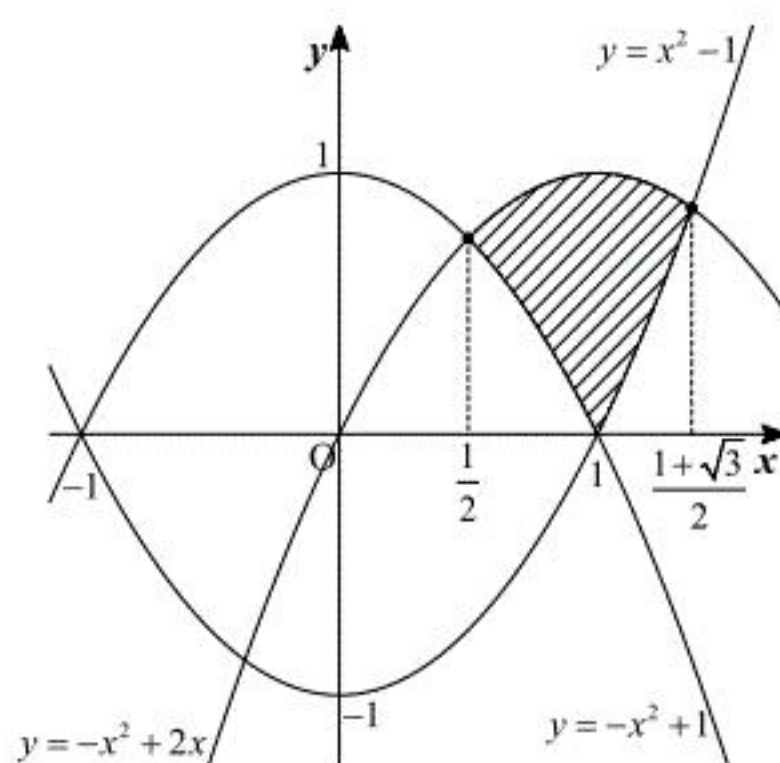
Iについて、 α が虚数のとき、 $\alpha\bar{\alpha}$ は必ず実数となるから、 $\beta = \bar{\alpha}$ とすれば β は虚数であり $\alpha\beta$ は正の実数となるから正しい。

【解答】

(1)	カ	キ	ク	ケ		
	1	2	3	2		
(2)	コ	サ	シ	ス	セ	
	-5	12	1	2	3	
(3)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
	2	2	1	2	3	2
(4)	ナ	ニ	ヌ	ネ		
	5	4	15	16		

【解説】

(1)

領域 D を図示すると下図の斜線部分になる(境界を含む)。

前図より領域 D に含まれるのは交点のうち x 座標の大きい方である。よって、求める交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x &= x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

の大きい方であるため、 $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ となる。

(2)

(1)の図の斜線部分の面積を求めればよい。 $y = -x^2 + 1$ と $y = -x^2 + 2x$ 交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x &= -x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 2x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}}^1 \{(-x^2 + 2x) - (-x^2 + 1)\} dx + \int_1^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \{(-x^2 + 2x) - (x^2 - 1)\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx + \int_1^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} (-2x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x \right]_1^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{4 + 3\sqrt{3}}{6} - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3)

(1)の図より、条件を満たす点 P は $y = -x^2 + 1$ 上の $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ の部分にある。 $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ を満たす実数 t を用いて点 P の座標を $(t, -t^2 + 1)$ とすると、

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{t^2 + (-t^2 + 1)^2} \\ &= \sqrt{t^4 - t^2 + 1} \\ &= \sqrt{\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

となる。 $t^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ より、 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ は $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ を満たし、このとき OP は最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をと

る。また、点 P の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

(4)

 $x + 2y = k$ とおくと、 $y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2}$ となるから、傾きが $-\frac{1}{2}$ で領域 D と共有点をもつ直線のうち

 y 切片が最大となるものを考えればよい。 $y = -x^2 + 2x$ の接線のうち傾きが $-\frac{1}{2}$ のものと

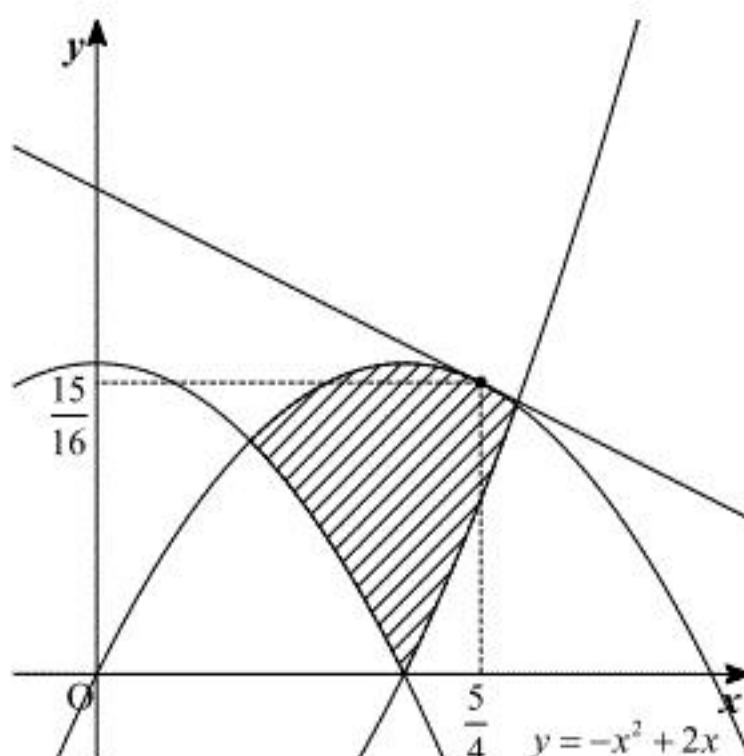
 $y = -x^2 + 2x$ の接点を考えると、その x 座標は

$$\begin{aligned} (-x^2 + 2x)' &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -2x + 2 &= -\frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となり、その y 座標は

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{5}{4} = \frac{2 + \sqrt{9}}{4}$, $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{12}}{4}$ に注意して接線のグラフを描くと下図のようになる。



よって、 $x + 2y$ を最大にする点 Q はここで考えた接点となり、その座標は $\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{16}\right)$ となる。

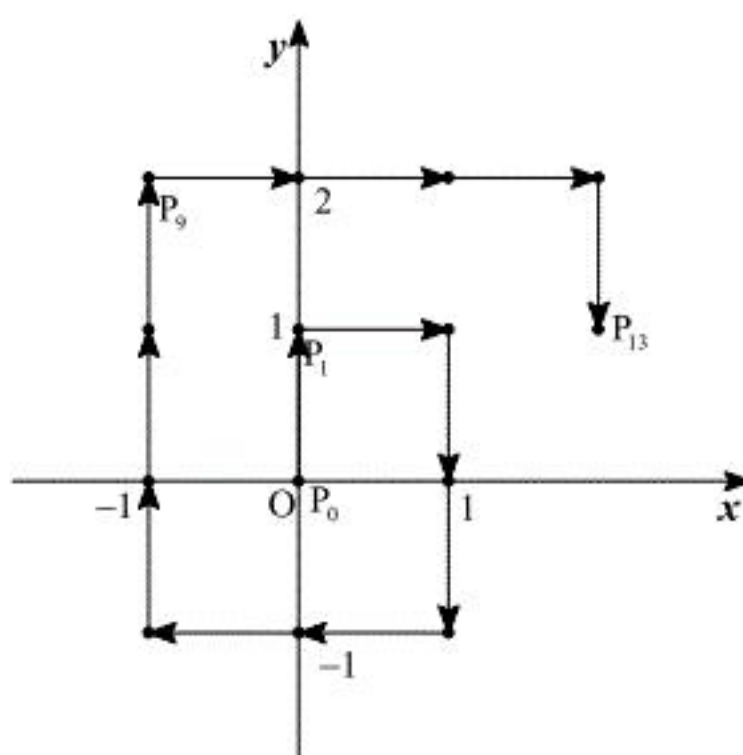
【解答】

(1)	$\boxed{\text{ノ}}$					
	79					
(2)	$\boxed{\text{ハ}}$	$\boxed{\text{ヒ}}$	$\boxed{\text{フ}}$	$\boxed{\text{ヘ}}$	$\boxed{\text{ホ}}$	$\boxed{\text{マ}}$
	4	-2	0	4	-3	0
(3)	$\boxed{\text{ミ}}$	$\boxed{\text{ム}}$				
	-4	8				
(4)	$\boxed{\text{メ}}$	$\boxed{\text{モ}}$	$\boxed{\text{ヤ}}$			
	42	-3	-3			
(5)	$\boxed{\text{ユ}}$	$\boxed{\text{ヨ}}$	$\boxed{\text{ラ}}$			
	16	-5	0			

【解説】

(1)

$P_0, P_1, \dots, P_{13}$ を図示すると下図のようになる。



よって、自然数 N について $-N \leq x \leq N$ かつ $-N \leq y \leq N$ にある $(2N+1)^2$ 個の格子点が並ん

だ後に $P_{(2N+1)^2}$ が $(-N, N+1)$ に並ぶことがわかる。したがって、 $N=4$ のとき $P_{81}(-4, 5)$ となる

ため、 $(-4, 3)$ はその 2 個前より、 $n=81-2=79$ となる。

(2)

P_n が (m, m) となるとき、その $(2m-1)$ 個前は $P_{n-2m+1}(-m+1, m)$ より $(-(m-1), (m-1)+1)$ となる。よって、

$$\begin{aligned} n-2m+1 &= \{2(m-1)+1\}^2 \\ \therefore n &= 4m^2 - 2m \end{aligned}$$

となる。

また、 P_n が $(0, m)$ となるとき、その $(m-1)$ 個前は $P_{n-m+1}(-m+1, m)$ より $(-(m-1), (m-1)+1)$

となる。よって、

$$\begin{aligned} n-m+1 &= \{2(m-1)+1\}^2 \\ \therefore n &= 4m^2 - 3m \end{aligned}$$

となる。

(3)

$228 = 15^2 + 3 = (2 \cdot 7 + 1)^2 + 3$ より、 P_{228} は $P_{225}(-7, 8)$ の 3 個後となる。よって $P_{228}(-4, 8)$ となる。

(4)

自然数 N について、上向きに並ぶのは $P_{(2N+1)^2 - 2N - 1}(-N, -N)$ から $P_{(2N+1)^2}(-N, -N+1)$ の

$(2N+1)$ 個の点である。よって n が最小になるのは $N=3$ のときで、

$$\begin{aligned} n &= (2N+1)^2 - 2N - 1 \\ &= 42 \end{aligned}$$

となる。また、 $P_{42}(-3, -3)$ となる。

(5)

P_n が $(m, 2m)$ となるとき、その $(3m-1)$ 個前は $P_{n-3m+1}(-2m+1, 2m)$ より $(-(2m-1), (2m-1)+1)$

となる。よって、

$$\begin{aligned} n-3m+1 &= \{2(2m-1)+1\}^2 \\ \therefore n &= 16m^2 - 5m \end{aligned}$$

となる。