TEAP利用型

(2019年度)

2 数学問題 (90分)

(この問題冊子は6ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，試験監督者から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能を使用してはならない。また，スマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. **マーク式の解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけたりしてはならない。また，マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. **問題 1 2 の解答は，各解答用紙に丁寧に記入すること。**
   足りない場合は，その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には何も書いてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消したうえで，**消しくずはきれいに取り除くこと。**
9. マーク式解答用紙の最下段の 1 2 の欄には記入しないこと。
10. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
11. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
14. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7，$\boxed{イ}$ に－26をマークする場合。

	符号	10の位											1の位										
	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

$\boxed{1}$ $\log x$ は x の自然対数, e は自然対数の底を表す。

(1) 正の実数 x に対して

$$x - \frac{x^2}{2} \ < \ \log(1+x) \ < \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

とおく。

(i) 自然数 n に対して

$$1 - \frac{1}{2n} \ < \ \log a_n \ < \ 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) 不等式

$$e^{0.9} \ < \ a_n$$

が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数平面において, 円周 $|z|=1$ 上の異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 を考える。このとき, 次の条件 p と q は同値であることを示せ。

p : z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形が正三角形である

q : $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$\boxed{3}$ 座標平面において, 双曲線 $C: xy=1$ 上の異なる 3 点 P, Q, R を考える。P, Q, R の x 座標をそれぞれ p, q, r とする。△PQR の重心を G, 垂心を H とする。ただし, 三角形の垂心とは各頂点からそれぞれの対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線が交わるただ一つの点のことである。以下の問において, $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{え}}$ にあてはまるものを選択肢 1 から, $\boxed{\text{お}}$ ～ $\boxed{\text{く}}$ にあてはまるものを選択肢 2 からそれぞれ選べ。

(1) G の座標は $\left(\boxed{\text{あ}}, \boxed{\text{い}}\right)$, H の座標は $\left(\boxed{\text{う}}, \boxed{\text{え}}\right)$ である。

選択肢 1：

① $p+q+r$	② $\dfrac{p+q+r}{3}$	③ $\dfrac{p+q+r}{3pqr}$
④ $\dfrac{pq+qr+rp}{pqr}$	⑤ $\dfrac{pq+qr+rp}{3}$	⑥ $\dfrac{pq+qr+rp}{3pqr}$
⑦ pqr	⑧ $\dfrac{pqr}{3}$	⑨ $\dfrac{1}{pqr}$
⑩ $-pqr$	⑪ $-\dfrac{pqr}{3}$	⑫ $-\dfrac{1}{pqr}$

(2) △PQR が正三角形である場合を考える。このとき, G と H は一致する。G の x 座標を a とする。

(i) p, q, r を解に持つ 3 次方程式は

$$x^3 + \boxed{\text{お}}\,x^2 + \boxed{\text{か}}\,x + \boxed{\text{き}} = 0$$

と表される。

(ii) △PQR の外接円と C が P, Q, R 以外の共有点 S を持つとき, S の x 座標は $\boxed{\text{く}}$ である。

選択肢 2：

① a	② $-a$	③ $3a$	④ $-3a$
⑤ $\dfrac{1}{a}$	⑥ $-\dfrac{1}{a}$	⑦ $\dfrac{3}{a}$	⑧ $-\dfrac{3}{a}$
⑨ $\dfrac{1}{a^2}$	⑩ $-\dfrac{1}{a^2}$	⑪ $\dfrac{3}{a^2}$	⑫ $-\dfrac{3}{a^2}$

$\boxed{4}$ (1) 自然数 k, l に対して, $k \neq l$ のとき

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \boxed{\text{け}},$$

$k = l$ のとき

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \boxed{\text{こ}}$$

である。$\boxed{\text{け}}$, $\boxed{\text{こ}}$ にあてはまるものを以下から選べ。

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

⑥ $-\dfrac{1}{2}$　⑦ $\dfrac{1}{2}$　⑧ $k+l$　⑨ $|k-l|$　⑩ $\dfrac{k+l}{2}$

(2) 自然数 k に対して $a_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos kx \, dx$ とする。

(i) k が奇数のとき

$$a_k = \boxed{\text{ア}},$$

k が偶数のとき

$$a_k = \frac{\boxed{\text{イ}}}{k^2 + \boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(ii) 自然数 n に対して

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{|a_k|} \cos kx,$$

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x))^2 \, dx$$

とする。このとき, $I_1 = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり,

$$I_n = \frac{\boxed{\text{カ}}\, n}{\boxed{\text{キ}}\, n + 1} \quad (n \text{ は自然数})$$

である。