

I

- (1) ア:8 イ:0 ウエ:-5 オ:2
- (2) ア:2 イウ:-1 エオ:32 カ:3 キ:0
- (3) ア:2 イ:3 ウ:1 エ:2 オ:1 カ:2 キ:0 ク:1 ケ:3 コ:1 サ:8 シ:3 ス:0 セ:1 ソ:9 タ:1
チツ:26 テ:9 ト:0 ナ:1 ニス:27 ネノ:-2 ハ:6 ヒフ:-1 ヘ:3
- (4) ア:0 イウ:22 エ:2 オカ:22 キ:4 ク:3 ケ:2 コ:4 サ:5 シ:2 ス:0 セ:3 ソ:2 タ:1
チ:2 ツテ:10 ト:0 ナ:3 ニ:1 ス:1 ネ:1 ノハ:-3 ヒフ:11

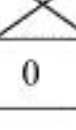
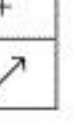
【解説】

- (1)
- $$I=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{7}{2}x^2+4x\right]_0^4$$
- $$=64-128+56+16$$
- $$=8$$
- である。また、 $g(x)$ は $f(x)$ を x 軸の負の向きに2だけ平行移動したものだから、
- $$g(x)=f(x+2)$$
- $$=x^3-5x+2$$
- となる。

- (2)
- [1] $x<-3, 3\leq x$ のとき
- $$y=x^3-9x+3x^2-27$$
- $$=(x-3)(x+3)^2$$
- $$y'=3x^2+6x-9$$
- $$=3(x-1)(x+3)$$
- となる。

- [2] $-3\leq x<3$ のとき
- $$y=x^3-9x-3x^2+27$$
- $$=(x-3)^2(x+3)$$
- $$y'=3x^2-6x+9$$
- $$=3(x-3)(x+1)$$
- となる。

以上,[1],[2]より y の増減表は以下のようになる。

x	...	-3	...	-1	...	3	...
y'	+		+	0	-		+
y		0		32		0	

よって、増加から減少に転じている $x=-1$ で極大値32をとり、減少から増加に転ずる $x=3$ で極小値0をとることがわかる。とくに、極値は2つである。

- (3)
- P の逆行列 Q は
- $$Q=\frac{1}{2\cdot 2-(-1)\cdot (-3)}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$$
- $$=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$$

と求まる。また、

$$B=PAQ=\begin{pmatrix}1&2\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix}1&\frac{8}{3}\\0&\frac{1}{9}\end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix}1&\frac{26}{9}\\0&\frac{1}{27}\end{pmatrix}$$

より、

$$B^n=\begin{pmatrix}1&3-3^{-n+1}\\0&3^{-n}\end{pmatrix}\quad n\geq 1$$

であることが推測され、数学的帰納法により証明できる。したがって、

$$QP=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であることから、

$$\begin{aligned}B^n&=(PAQ)^n\\&=(PAQ)(PAQ)\cdots(PAQ)\\&=PA(QP)A(QP)\cdots(QP)AQ\\&=PA^nQ\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}A^n&=QB^nP\\&=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3-3^{-n}\\0&3^{-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2+3^{-n+1}&6-2\cdot 3^{-n+1}\\-1+3^{-n}&3-2\cdot 3^{-n}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}A^n=\begin{pmatrix}-2&6\\-1&3\end{pmatrix}$$

と求まる。

- (4)
- $$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{6},\quad |\vec{c}|=\sqrt{21},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=5,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=4,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=7$$

である。よって、

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})&=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\\&=0\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=22\\|\vec{a}-\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\end{aligned}$$

より、

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{22},\quad |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$$

である。

$$\vec{p}=x\vec{d}+y\vec{e}$$

とおくと、

$$\vec{q}=\vec{c}-\vec{p}=\vec{c}-x\vec{d}-y\vec{e}$$

であつて、 $|\vec{d}|=|\vec{e}|=1, \vec{d}\cdot\vec{e}=0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=x\vec{c}\cdot\vec{d}+y\vec{c}\cdot\vec{e}-x^2|\vec{d}|^2-2xy\vec{d}\cdot\vec{e}-y^2|\vec{e}|^2\\&=\frac{x}{\sqrt{22}}\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\frac{y}{\sqrt{2}}\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-x^2-y^2\\&=\frac{\sqrt{22}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}y-x^2-y^2\end{aligned}$$

となるので、直交条件 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ は上の式を整理し、

$$\left(x-\frac{\sqrt{22}}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{5}{2}$$

と求まる。したがって、中心は

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{22}}{4}\vec{d}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\vec{e}&=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{3}{4}(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\\&=\left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

であり、半径は

$$\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

である。

また、 $|\vec{q}|$ を最小にするような $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ は、

$$\begin{aligned}|\vec{q}|^2&=\left|\vec{c}-(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\right|^2\\&=|\vec{c}|^2+\alpha^2|\vec{a}|^2+\beta^2|\vec{b}|^2-2\alpha\vec{a}\cdot\vec{c}+2\alpha\beta\vec{a}\cdot\vec{b}-2\beta\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=21+6\alpha^2+6\beta^2-14\alpha+10\alpha\beta-8\beta\\&=6\alpha^2+(10\beta-14)\alpha+6\beta^2-8\beta+21\\&=6\left(\alpha+\frac{5\beta-7}{6}\right)^2+\frac{11}{6}(\beta+1)^2+11\end{aligned}$$

となることから、 $\alpha=2, \beta=-1$ のとき、すなわち

$$\begin{aligned}\vec{p}&=2(1,2,1)-(2,1,1)=(0,3,1)\\ \vec{q}&=(1,4,-2)-(0,3,1)=(1,1,-3)\end{aligned}$$

のときであり、最小値は

$$|\vec{q}|=\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$$

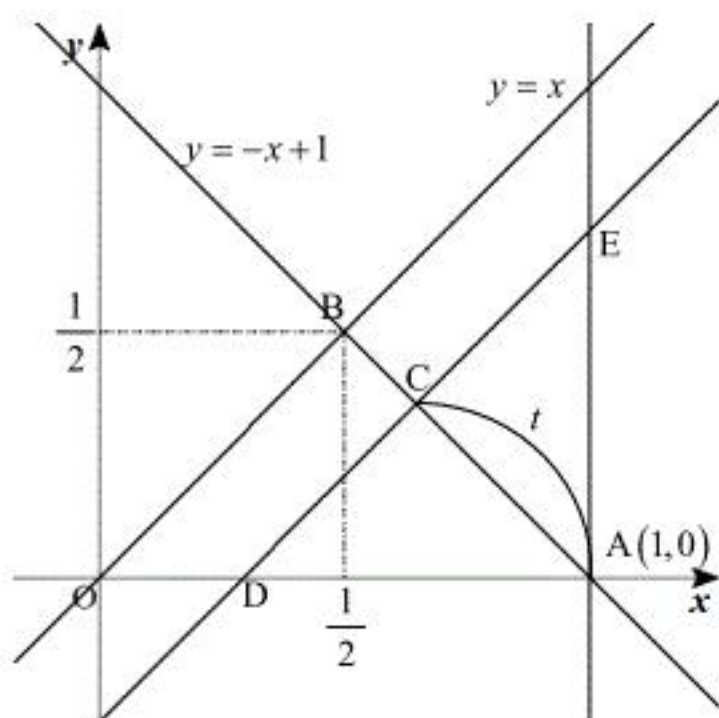
である。

II

ア:1 イ:1 ウ:1 エ:2 オ:1 カ:2 キ:2 ク:2 ケ:2 コ:2 サ:1 シ:3 スセ:-4 ソ:4 タ:2
チ:3 ツ:4 テ:2

【解説】

次のような図になる。



したがって、底面の半径は1、高さは1である。 $y=x$ と $y=-x+1$ の交点Bは、両式を連立し

て、 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とわかる。また

$$a = AB = OA \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。

Tを x 軸周りに回転させた図形について、

(底面の扇形の周)=(底面の円周)

という関係が成り立つことから、扇形の中心角 θ は、

$$2t \cdot \theta = \sqrt{2}t \cdot 2\pi \quad \therefore \theta = \sqrt{2}\pi$$

となる。よって側面の扇形の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot (2t)^2 \cdot \theta = 2\sqrt{2}\pi t^2$$

と求まる。したがって、これを0から $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ まで積分すれば、

$$\begin{aligned} \int_0^a 2\sqrt{2}\pi t^2 dt &= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

次に、より一般に、 $y=x$ 、 $x^2+y^2=r^2$ および x 軸で囲まれた扇形の x 軸周りでの回転体の体

積 $V(r)$ を求める。 $0 \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$ の部分の回転体と、 $\frac{r}{\sqrt{2}} \leq x \leq r$ の部分の回転体とに分け

て考えると、

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} + \pi \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r y^2 dx \\ &= \frac{\pi r^3}{6\sqrt{2}} + \pi \int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi r^3}{6\sqrt{2}} + \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r \\ &= \frac{\pi r^3}{6\sqrt{2}} + \pi \left(\frac{2}{3}r^3 - \frac{5}{6\sqrt{2}}r^3 \right) \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $x^2+y^2=2$ 、すなわち $r=\sqrt{2}$ の場合の体積は、

$$V(\sqrt{2}) = \frac{-4+4\sqrt{2}}{3}\pi$$

である。また、問題文にある注意を踏まえると、Vの球面部分の面積は、

$$V'(r) \Big|_{r=\sqrt{2}}$$

として得られるから、Vの表面積は、円錐部分の側面積(つまり、 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときのTの回転

体の側面積)もあわせて、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + V'(r) \Big|_{r=\sqrt{2}} &= \sqrt{2}\pi + (2-\sqrt{2})\pi r^2 \Big|_{r=\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\pi + (4-2\sqrt{2})\pi \\ &= (4-\sqrt{2})\pi \end{aligned}$$

と求まる。

III

(1)

関数 $y = f(x)$ の値域とは、変数 x の取りうる値の範囲、つまり定義域の値 $x = a$ に応じて定まる変数 y の値 $f(a)$ の取りうる範囲のことをいう。

(2)

存在条件: f の終域が f の値域と一致し、かつ、値域の任意の値 b に対して、 $b = f(a)$ なる定義域の値 a がただ一つ存在すること。

以上の条件のもとで、関数 $y = f(x)$ の逆関数とは、 f の値域を定義域にもち、 f の値域の各値 b に対し条件によりただ一つ存在する、 $b = f(a)$ なる f の定義域の値 a を対応させる関数のことをいう。

(3)

指数関数 $y = a^x$ 、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ は実数全体を定義域に、終域を正の実数全体にもつ関数である。任意の正の実数 b に対し、 $a^x = b$ となるような実数 x が存在し、さらに、 $a > 1$ ならば単調増加、 $0 < a < 1$ ならば単調減少であるから、このような x はただ一つである。したがって、指数関数は(2)の条件を満たすから、対数関数 $y = \log_a x$ を指数関数 $y = a^x$ の逆関数として定義する。

(4)

対数関数の底の変換公式とは以下のようなものである。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ただし、 $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$ とする。

これを指数法則から導く。

$$x = \log_a b, \quad y = \log_c b, \quad z = \log_c a$$

とおく。対数関数の定義から、

$$a^x = b, \quad c^y = b, \quad c^z = a$$

が成り立つ。したがって、指数法則より、

$$b = a^x = (c^z)^x = c^{zx}$$

となるから、再び定義により、

$$zx = \log_c b = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{z}$$

となるが、これは示すべき底の変換公式に他ならない。よって示された。

(証明終)