$\boxed{1}$

(1)

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\underline{\boxed{\text{ア}}=1\ \ \boxed{\text{イ}}=0\ \ \boxed{\text{ウ}}=0\ \ \boxed{\text{エ}}=0\ \ \boxed{\text{オ}}=0\ \ \boxed{\text{カ}}=1}$ ……(答)

$$\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\\-1&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-7&-23\\-13&-33\\6&10\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\\-1&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&-23\\-13&-33\\6&10\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}5&-3\\0&0\\11&7\end{pmatrix}\ \therefore A=\begin{pmatrix}5&-3\\11&7\end{pmatrix}$$

$\underline{\boxed{\text{キ}}=5\ \ \boxed{\text{クケ}}=-3\ \ \boxed{\text{コサ}}=11\ \ \boxed{\text{シ}}=7}$ ……(答)

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$

$\displaystyle=8\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=8\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=4\pi$

$\underline{\boxed{\text{ア}}=4}$ ……(答)

$r=\sin3\theta$ （$0\leqq\theta\leqq2\pi$ より，$0\leqq3\theta\leqq6\pi$ ）

ここで，$r\geqq0$ とおくと，

$0\leqq3\theta\leqq\pi$，$2\pi\leqq3\theta\leqq3\pi$，$4\pi\leqq3\theta\leqq5\pi$ より，

$\therefore\ 0\leqq\theta\leqq\frac{1}{3}\pi$，$\frac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\pi$，$\frac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

$\underline{\boxed{\text{イ}}=1\ \ \boxed{\text{ウ}}=3\ \ \boxed{\text{エ}}=2\ \ \boxed{\text{オ}}=3\ \ \boxed{\text{カ}}=4\ \ \boxed{\text{キ}}=3\ \ \boxed{\text{ク}}=5\ \ \boxed{\text{ケ}}=3}$ ……(答)

対称性を利用して，

$\displaystyle S=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3\theta\,d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos6\theta}{2}d\theta=\frac{3}{4}\left[\theta-\frac{1}{6}\sin6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\pi$

$\underline{\boxed{\text{コ}}=1\ \ \boxed{\text{サ}}=4}$ ……(答)

(3) $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=-\frac{1}{2}$ のとき，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\quad\therefore\ a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle b_{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left\{b_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$\displaystyle\Longleftrightarrow b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\displaystyle\Longleftrightarrow b_{n+1}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=-\frac{1}{2}\left\{b_n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

数列 $\left\{b_n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ は，初項 $1-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\displaystyle\therefore\ b_n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\Longleftrightarrow b_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n+5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$\displaystyle=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{5}{2}}{1+\frac{1}{2}}$

$\displaystyle=\frac{4}{3}$

$\underline{\boxed{\text{ア}}=4\ \ \boxed{\text{イ}}=3}$ ……(答)

$\alpha=\frac{1}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$ のとき，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ \ \therefore\ a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\displaystyle b_{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{b_n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$\Longleftrightarrow 3^{n+1}b_{n+1}-3^nb_n=6$

数列 $\{3^nb_n\}$ は，初項 $3^1b_1=-3$，公差 6 の等差数列

$\therefore\ 3^nb_n=-3+(n-1)\cdot6$

$\displaystyle\Longleftrightarrow b_n=\frac{6n-9}{3^n}$

ここで，$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots b_n$ とおく.

$$S_n=-3\cdot\frac{1}{3^1}+3\cdot\frac{1}{3^2}+9\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\cdots+(6n-9)\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$-)\ \frac{1}{3}S_n=\qquad -3\cdot\frac{1}{3^2}+3\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\cdots+(6n-15)\cdot\frac{1}{3^n}+(6n-9)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n=-1+6\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-(6n-9)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$$

$$=-1+6\cdot\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}-(6n-9)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$$

$$=-\frac{2n}{3^n}\quad\therefore S_n=-\frac{3n}{3^n}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3n}{3^n}\right)=0$

$\underline{\boxed{\text{ウ}}=0}$ ……(答)

(4) $\theta=\frac{\pi}{5}$ とおくと，$\cos2\theta=-\cos3\theta$

$\Longleftrightarrow 2\cos^2\theta-1=-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$\Longleftrightarrow 4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-3\cos\theta-1=0$

$\Longleftrightarrow(\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$

$\displaystyle\therefore\ \cos\theta=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{5}>0$ より，$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\underline{\boxed{\text{ア}}=1\ \ \boxed{\text{イ}}=5\ \ \boxed{\text{ウ}}=4}$ ……(答)

$\theta=\frac{\pi}{5}$ （$=36^\circ$）とおく.

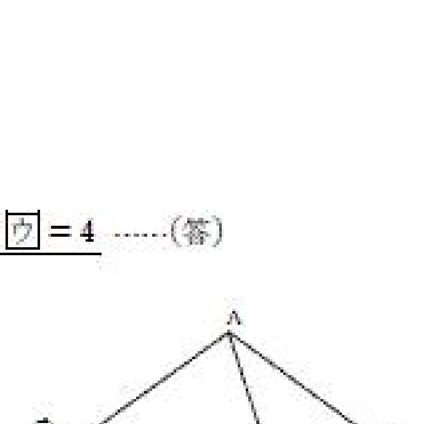
$\mathrm{AD}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos3\theta$

$=2-2\cdot\cos3\theta$

$=2-2\cdot(-\cos2\theta)$

$=2+2(2\cos^2\theta-1)$

$\displaystyle=4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$



$\displaystyle\therefore\ \mathrm{AD}=\left|\vec{d}\right|=2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\underline{\boxed{\text{エ}}=1\ \ \boxed{\text{オ}}=5\ \ \boxed{\text{カ}}=2}$ ……(答)

$\displaystyle\vec{b}\cdot\vec{d}=1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\cos2\theta$

$\displaystyle=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(2\cos^2\theta-1)$

$\displaystyle=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left\{2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}$

$\underline{\boxed{\text{キ}}=1\ \ \boxed{\text{ク}}=2}$ ……(答)

$\displaystyle\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\vec{d}-\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\vec{d}-\vec{b}\right)$

$\displaystyle=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\vec{b}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{d}$

$\underline{\boxed{\text{ケ}}=1\ \ \boxed{\text{コ}}=5\ \ \boxed{\text{サ}}=2\ \ \boxed{\text{シ}}=5\ \ \boxed{\text{ス}}=1\ \ \boxed{\text{セ}}=2}$ ……(答)

(5)

AAAAA → 3 つの箱 (大)，(中)，(小) に分ける.

$\left.\begin{array}{l}(5,0,0)\cdots\cdots\cdots 3\text{ 通り}\\(4,1,0)\cdots\cdots\cdots 3!=6\text{ 通り}\\(3,2,0)\cdots\cdots\cdots 3!=6\text{ 通り}\\(3,1,1)\cdots\cdots\cdots 3\text{ 通り}\\(2,2,1)\cdots\cdots\cdots 3\text{ 通り}\end{array}\right\}$ 21 通り（${}_7\mathrm{C}_2=21$）　$\underline{\boxed{\text{アイ}}=21}$ ……(答)

AAAAA → 3 つの箱に分ける.

$(5,0,0)$，$(4,1,0)$，$(3,2,0)$，$(3,1,1)$，$(2,2,1)$ より　$\underline{\boxed{\text{ウ}}=5}$ ……(答)

BBB → 3 つの箱 (大)，(中)，(小) に分け方は，

$\left.\begin{array}{l}(3,0,0)\cdots\cdots\cdots 3\text{通り}\\(2,1,0)\cdots\cdots\cdots 6\text{通り}\\(1,1,1)\cdots\cdots\cdots 1\text{通り}\end{array}\right\}$ 10通りより 21·10 = 210 通り　$\underline{\boxed{\text{エオカ}}=210}$ ……(答)

BBB → 3 つの箱の分け方は

$(3,0,0)$　　$(5,0,0)$

$(2,1,0)$ と　$(4,1,0)$ の組みを考えて　$\underline{\boxed{\text{キク}}=38}$ ……(答)

$(1,1,1)$　　$(3,2,0)$

　　　　$(3,1,1)$

　　　　$(2,2,1)$

$\boxed{2}$

$7x^2-6xy+12y^2=4$ と直線 $y=-x+m$ が接するときを調べる．

$7x^2-6x(-x+m)+12(-x+m)^2=4$

$\Longleftrightarrow 25x^2-30mx+12m^2-4=0 \quad \cdots\cdots ①$

$$D/4=(15m)^2-25(12m^2-4)$$

$$=100-75m^2=0 \qquad \therefore\ m=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

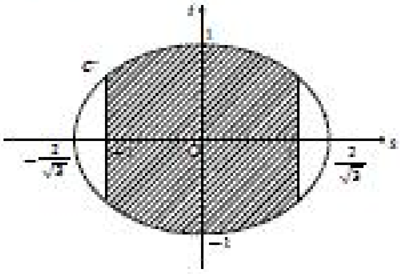
$\left(m=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}\right)$ $① \Longleftrightarrow 25\left(x-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2=0 \qquad \therefore\ x=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ 接点 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{5},\dfrac{4\sqrt{3}}{15}\right)$

$\left(m=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}\right)$ $① \Longleftrightarrow 25\left(x+\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2=0 \qquad \therefore\ x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ 接点 $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{5},-\dfrac{4\sqrt{3}}{15}\right)$

この２点を通る直線と考えてよく　$y=\dfrac{\frac{8\sqrt{3}}{15}}{\frac{4\sqrt{3}}{5}}x \Longleftrightarrow x-\dfrac{3}{2}y=0$

$\boxed{ア}=3$ $\boxed{イ}=2$ ……(答)

ここで，$\begin{cases} s=x+y \\ t=x-\dfrac{3}{2}y \end{cases}$ とすると $\begin{cases} x=\dfrac{3}{5}s+\dfrac{2}{5}t \\ y=\dfrac{2}{5}s-\dfrac{2}{5}t \end{cases}$　楕円 C に代入し



$7\left(\dfrac{3}{5}s+\dfrac{2}{5}t\right)^2-6\left(\dfrac{3}{5}s+\dfrac{2}{5}t\right)\left(\dfrac{2}{5}s-\dfrac{2}{5}t\right)+12\left(\dfrac{2}{5}s-\dfrac{2}{5}t\right)^2=4$

$\Longleftrightarrow 7(3s+2t)^2-6(3s+2t)(2s-2t)+12(2s-2t)^2=100$

$\Longleftrightarrow 75s^2+100t^2=100 \qquad \therefore\ s^2+\dfrac{4}{3}t^2=\dfrac{4}{3}$

$\boxed{ウ}=4$ $\boxed{エ}=3$ $\boxed{オ}=4$ $\boxed{カ}=3$ ……(答)

つまり，$C'=\dfrac{s^2}{\frac{4}{3}}+\dfrac{t^2}{1^2}=1$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}2\cdot\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}-s^2\right)}\,ds=\int_{-1}^{1}\sqrt{3\left(\frac{4}{3}-s^2\right)}\,ds \qquad s=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$

$\displaystyle=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$

$\therefore\ ds=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\,d\theta$

s	-1	$\to$	1
θ	$-\frac{\pi}{3}$	$\to$	$\frac{\pi}{3}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi+1$

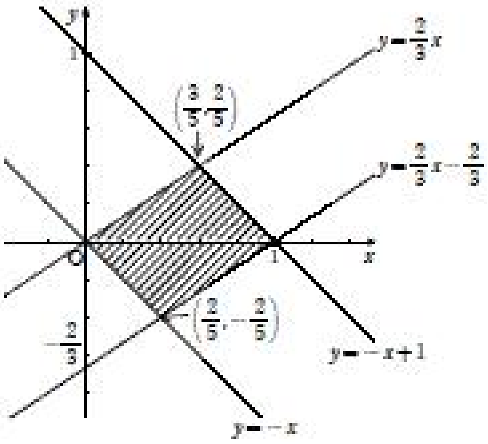
$\boxed{キ}=3$ $\boxed{ク}=4$ $\boxed{ケ}=3$

$\boxed{コ}=4$ $\boxed{サ}=3$ $\boxed{シ}=9$ $\boxed{ス}=1$ ……(答)

次に $\begin{cases} 0\leqq x+y\leqq 1 \\ 0\leqq x-\dfrac{3}{2}y\leqq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x\leqq y\leqq -x+1 \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}\leqq y\leqq \dfrac{2}{3}x \end{cases}$

$1\cdot\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}$

$\boxed{セ}=2$ $\boxed{ソ}=5$ (答)



$S=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi+1\right)=\dfrac{8\sqrt{3}}{45}\pi+\dfrac{2}{5}$

$\boxed{タ}=8$ $\boxed{チ}=3$ $\boxed{ツテ}=45$ $\boxed{ト}=2$ $\boxed{ナ}=5$ ……(答)

$\left(\pi\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot1\right)\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{4\sqrt{3}}{15}\pi$

$\boxed{ニ}=4$ $\boxed{ヌ}=3$ $\boxed{ネノ}=15$ ……(答)

$\boxed{3}$

(1) 整式 $P(x)$ について,

$P(x)$ を1次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ （答）

(2) $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを R とおく.

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

$x=\alpha$ を代入すると

$$P(\alpha)=R$$

となり示された. （証明終）

(3) 題意より $f(a)=0$

$f(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を $Q'(x)$, 余りを R' とおく.

$$f(x)=(x-a)Q'(x)+R'$$

ここで, $x=a$ を代入すると

$$f(a)=R' \quad \text{つまり} \quad R'=0$$

これより,

$$f(x)=(x-a)Q'(x)$$ となり $f(x)$ は $x-a$ で割り切れる.

（証明終）

(4) 題意より $f(a)=f'(a)=0$

$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの商を $Q''(x)$, 余りを $mx+n$ とおく.

$$f(x)=(x-a)^2Q''(x)+mx+n \quad \cdots\cdots①$$

辺々を x で微分すると

$$f'(x)=2(x-a)Q''(x)+(x-a)^2\{Q''(x)\}'+m \quad \cdots\cdots②$$

①, ②に $x=a$ を代入すると

$$\begin{cases} f(a)=ma+n=0 \\ f'(a)=m=0 \end{cases} \qquad \therefore\ m=n=0$$

これより, $f(x)=(x-a)^2Q''(x)$ となり, $f(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れる.

（証明終）