

1

(1) 「積が3の倍数になる」は「3回のうち少なくとも1回は3の倍数(3または6)が出る」と言い換えられるので、

$$P(\text{積が3の倍数}) = 1 - P(\text{積が3の倍数でない})$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3$$

$$= 1 - \frac{8}{27}$$

$$= \frac{19}{27}$$

$$\therefore \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}} = \frac{19}{27} \dots\dots (\text{答})$$

$$P(\text{奇数かつ3の倍数でない}) = P(\text{奇数}) - P(\text{奇数かつ3の倍数})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{2}{6}\right)^2 + {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{8} - \left( \frac{1}{216} + \frac{12}{216} + \frac{6}{216} \right)$$

$$= \frac{1}{27}$$

$$\therefore \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} = \frac{1}{27} \dots\dots (\text{答})$$

$$P(\text{積が6の倍数}) = P(\text{偶数かつ3の倍数})$$

$$= P(\text{3の倍数}) - P(\text{奇数かつ3の倍数})$$

$$= \frac{19}{27} - \frac{1+12+6}{216}$$

$$= \frac{133}{216}$$

$$\therefore \frac{\boxed{\text{クケコ}}}{\boxed{\text{サシス}}} = \frac{133}{216} \dots\dots (\text{答})$$

(2)  $y = -(x+1)(x-5)$  と  $y = 3(x+1)(x-1)$  を

各々描けば右の図の通り。

$$\text{関数 } y = |ax^2 + bx + c| + dx^2 + ex + f$$

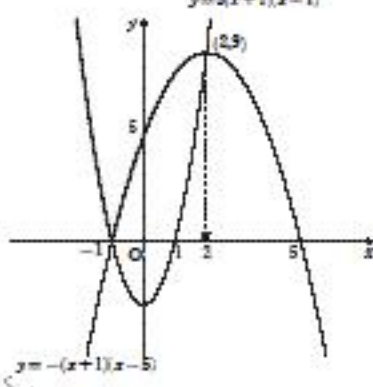
が連続であることに注意すれば、間いより、

$$\text{区間} [-1, 2] \text{ では, } y = -(x+1)(x-5)$$

$$\text{それ以外の区間では, } y = 3(x+1)(x-1)$$

となる。

$$\therefore \boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}} = [-1, 2] \dots\dots (\text{答})$$



上記より、 $y = |A(x+1)(x-2)| + dx^2 + ex + f$  ( $A \neq 0$ ) とおく。

このグラフは  $(-2, 9)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, 8)$ ,  $(2, 9)$  を通るので、

$$\begin{cases} |4A| + 4d - 2e + f = 9 \\ d - e + f = 0 \\ |2A| + f = 5 \\ |2A| + d + e + f = 8 \\ 4d + 2e + f = 9 \end{cases}$$

これを解くと、

$$\therefore \begin{cases} d = 1 \\ e = 2 \\ f = 1 \\ |A| = 2 \quad (A = 2) \end{cases}$$

以上より、

$$y = |2(x+1)(x-2)| + x^2 + 2x + 1$$

$$= |2x^2 - 2x - 4| + x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{cases} a = \boxed{\text{エ}} = 2 \\ b = \boxed{\text{オカ}} = -2 \\ c = \boxed{\text{キク}} = -4 \\ d = \boxed{\text{ケ}} = 1 \\ e = \boxed{\text{コ}} = 2 \\ f = \boxed{\text{サ}} = 1 \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$

(3)  $ax^2 + bx + c = x$  ( $a \neq 0$ )

$$\iff ax^2 + (b-1)x + c = 0$$

$$\iff a(x-3)^2 = 0$$

$$\text{より, } \begin{cases} b-1 = -6a \\ c = 9a \end{cases} \quad \text{すなわち, } \begin{cases} b = 1-6a \\ c = 9a \end{cases}$$

これより、放物線は、

$$y = ax^2 + (1-6a)x + 9a$$

$$\iff y = a \left( x^2 + \frac{1-6a}{a}x \right) + 9a$$

$$\iff y + \frac{(1-6a)^2}{4a} - 9a = a \left( x + \frac{1-6a}{2a} \right)^2$$

$$\iff 4 \cdot \frac{1}{4a} \left\{ y + \frac{(1-6a)^2}{4a} - 9a \right\} = \left( x + \frac{1-6a}{2a} \right)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

このグラフは、 $4 \cdot \frac{1}{4a} \cdot y = x^2$  のグラフを  $x$  軸方向に  $\frac{6a-1}{2a}$ ,  $y$  軸方向に  $9a - \frac{(1-6a)^2}{4a}$  だけ平行移動したグラフである。

このグラフの準線が  $x$  軸と一致するので、

$$-\frac{1}{4a} + 9a - \frac{(1-6a)^2}{4a} = 0$$

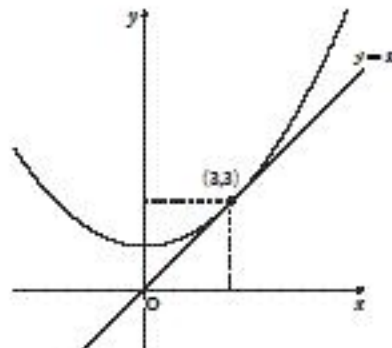
$$\iff 36a^2 = 36a^2 - 12a + 2$$

$$\iff a = \frac{1}{6} \quad (\neq 0)$$

これより、①は、

$$4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left( y - \frac{3}{2} \right) = x^2$$

よって、焦点座標は  $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}) = (0, 3) \dots\dots (\text{答})$



$$\begin{cases} a = \boxed{\text{ウ}} = \frac{1}{6} \\ b = \boxed{\text{オ}} = 0 \\ c = \boxed{\text{カ}} = \frac{3}{2} \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$

(4)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ( $a, b, c, d$  は実数) とおく。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ c+d = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$AC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a-b = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3} \\ c-d = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$A(B+C) = AB + AC = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots (\text{答})$$

$$A(B-C) = AB - AC = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オカ}} \\ \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \dots\dots (\text{答})$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より, } a = 1, b = \frac{-1}{3}, c = 0, d = \frac{2}{3} \quad \therefore \begin{pmatrix} \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケコ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \boxed{\text{ス}} \\ \boxed{\text{セ}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \dots\dots (\text{答})$$

ここで、 $D = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ( $x$  と  $y$  は実数) とおく。

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{これより, } x=5, y=2 \quad \therefore \boxed{\text{ソ}} = 5, \boxed{\text{タ}} = 2 \dots\dots (\text{答})$$

$$AD = A(5B+2C) = 5AB+2AC$$

$$= 5 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore AD = \begin{pmatrix} \boxed{\text{チ}} \\ \boxed{\text{ツ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \dots\dots (\text{答})$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より, } AB = \frac{2}{3}B, AC = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}B+C$$

ここで、 $D = 5B+2C$  に対して、

$$AD = A(5B+2C) = 5AB+2AC = \frac{10}{3}B+2\left(\frac{1}{3}B+C\right) = 4B+2C$$

$$A^2D = A(4B+2C) = 4AB+2AC = \frac{8}{3}B+2\left(\frac{1}{3}B+C\right) = \frac{10}{3}B+2C$$

$$A^3D = A\left(\frac{10}{3}B+2C\right) = \frac{10}{3}AB+2AC = \frac{20}{9}B+2\left(\frac{1}{3}B+C\right) = \frac{26}{9}B+2C$$

一般に、 $A^nD = a_nB+2C$  と表せるから、

$$A^{n+1}D = a_nAB+2AC = \frac{2}{3}a_nB+2\left(\frac{1}{3}B+C\right) = \left(\frac{2}{3}a_n+\frac{2}{3}\right)B+2C$$

よって、 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}$  ( $a_1 = 4$ ) となるから、

$$a_{n+1} - 2 = \frac{2}{3}(a_n - 2)$$

数列  $\{a_n - 2\}$  は初項  $a_1 - 2 = 2$ 、公比  $\frac{2}{3}$  の等比数列であるので、

$$\therefore a_n - 2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \iff a_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^nD = 2B+2C = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\text{テ}} = 2, \boxed{\text{ト}} = 2, \begin{pmatrix} \boxed{\text{ナ}} \\ \boxed{\text{ニ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots (\text{答})$$

(5) 直線  $m$  を  $y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2$  とし、点  $(t+h, (t+h)^2)$  における法線を  $m'$  とする。

$m'$  は、 $y = -\frac{1}{2(t+h)}x + \frac{1}{2} + (t+h)^2$  となるので、交点の  $x$  座標は、

$$-\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2 = -\frac{1}{2(t+h)}x + \frac{1}{2} + (t+h)^2$$

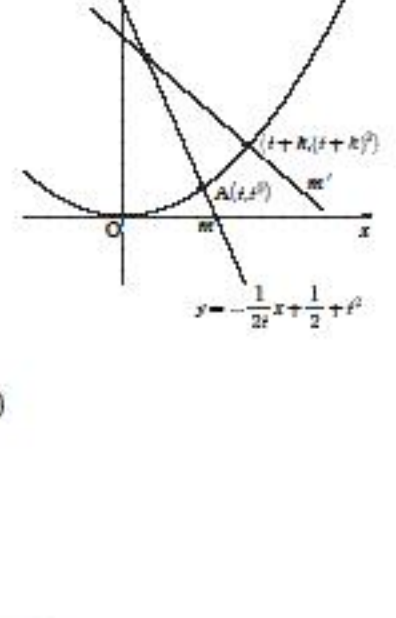
$$\iff \frac{t-(t+h)}{2t(t+h)}x = 2th+h^2$$

$$\iff x = -2t(t+h)(2t+h)$$

(ただし、 $t \neq 0$  かつ  $t+h \neq 0$  とする)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{-2t(t+h)(2t+h)\} = -4t^3 \text{ より, } \begin{cases} x(t) = -4t^3 \\ y(t) = 3t^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = \boxed{\text{アイ}} = -4, b = \boxed{\text{ウ}} = 3, c = \boxed{\text{エ}} = 3 \\ d = \boxed{\text{オ}} = 2, e = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} = \frac{1}{2} \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$



ここで、 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 144t^4 + 36t^2$  より、

$$\int_0^{\sqrt{e}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\sqrt{e}} \sqrt{144t^4 + 36t^2} dt = 12 \int_0^{\sqrt{e}} t \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$u = t^2 + \frac{1}{4}$  とおく。

$$du = 2t dt \quad \frac{u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}}$$

$$(\textcircled{1} \text{ の式}) = 12 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = 6 \left[ \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 4 \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 4 \cdot \frac{26}{8} = 13$$

$$\therefore \boxed{\text{クケ}} = 13 \dots\dots (\text{答})$$



$$\vec{a} = (4, \boxed{\text{ア}}) = (4, 3) \dots\dots (\text{答})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 = 5 \quad \therefore \boxed{\text{イ}} = 5 \dots\dots (\text{答})$$

$$\vec{c} + t\vec{a} = (1, -1) + t(4, 3) = (4t+1, 3t-1)$$

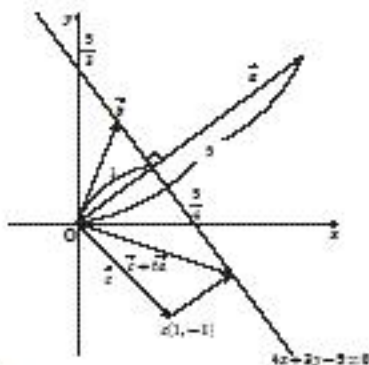
これを、 $4x+3y-5=0$ へ代入すると、

$$4(4t+1) + 3(3t-1) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25t = 4$$

$$\therefore t = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}} = \frac{4}{25} \dots\dots (\text{答})$$

$$(\text{Cと直線 } 4x+3y-5=0 \text{ との距離}) = 5 \cdot \frac{4}{25} = \frac{4}{5} \quad \therefore \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} = \frac{4}{5} \dots\dots (\text{答})$$



方向ベクトル  $\vec{d} = (1, -1, 2)$  と方向ベクトル  $\vec{e} = (1, 2, -2)$  の両方に垂直なベクトル  $\vec{f}$  は、 $\vec{d} \cdot \vec{f} = 0$  かつ  $\vec{e} \cdot \vec{f} = 0$  であることから、

$$\therefore \vec{f} = \left(1, -2, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \boxed{\text{クケ}} = -2 \\ \boxed{\text{コサ}} = -\frac{3}{2} \\ \boxed{\text{シ}} = \frac{3}{2} \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$

$$\vec{f} \cdot \vec{p} = \left(1, -2, -\frac{3}{2}\right) \cdot (3, 1, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} = -\frac{1}{2} \dots\dots (\text{答})$$

ここで  $l$  上の点  $X$ ,  $m$  上の点  $Y$  に対して、 $XY$  の距離が最小のときを考える。

$$\overrightarrow{XY} = r\vec{f} = r\left(1, -2, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore |\overrightarrow{XY}| = \sqrt{\frac{29}{4}}|r| = \frac{\sqrt{29}}{2}|r| \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{XY} \cdot \vec{f} = r|\vec{f}|^2 = \frac{29}{4}r$$

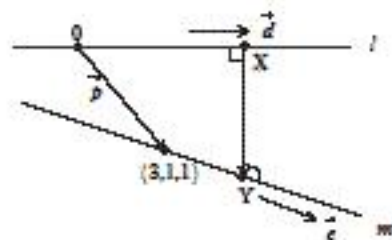
$$\text{より, } \frac{29}{4}r = -\frac{1}{2}$$

$$r = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{29} = -\frac{2}{29}$$

①へ代入して、

$$|\overrightarrow{XY}| = \frac{\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{29} = \frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}} = \frac{\sqrt{29}}{29} \dots\dots (\text{答})$$



(1) 共役複素数 …… (答)

(2)  $f(x)$  を  $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$  で割った商を  $g(x)$ , 余りを  $mx + n$  ( $m, n$  は実数) とおけば,

$$f(x) = \{x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\} \cdot g(x) + mx + n \quad \cdots \cdots ①$$

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \\ \alpha \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \end{cases}$$

より,  $x = \alpha, \bar{\alpha}$  を 2 解にもつ  $x$  の 2 次方程式は

$$x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0 \quad \cdots \cdots ②$$

ここで, ①において  $x = \alpha$  を代入すると,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \{\alpha^2 - 2a\alpha + (a^2 + b^2)\} \cdot g(\alpha) + m\alpha + n \\ &= m\alpha + n = 0 \end{aligned}$$

②より,  $m = n = 0$

すなわち,  $f(x) = \{x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\} \cdot g(x)$  と表され題意は示された.

(証明終)

(3)  $\alpha$  の共役複素数を  $\bar{\alpha}$  とすれば, 虚数  $\bar{\alpha}_k$  ( $k=1, 2, 3, \cdots$ ) に対して

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) \times (x - \alpha_2)(x - \bar{\alpha}_2) \times (x - \alpha_3)(x - \bar{\alpha}_3) \times \cdots$$

と表せる.

一般的に  $f(x)$  が  $x - \alpha_k$  を因子にもてば,  $x - \bar{\alpha}_k$  も因子をもつことになり, 2 つの因子  $(x - \alpha_k)(x - \bar{\alpha}_k)$  は 1 対になるため,  $f(x)$  の  $n$  個の因子の数は常に偶数となる.

(証明終)