I

(1) $a_1=b_1=a$ とおく．

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，

$$a_n=a\cdot r^{n-1},\quad b_n=a\cdot R^{n-1}\quad (n\geqq 1)$$

とおくと，$|r|<1$，$|R|<1$ が必要であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=6\qquad (\Longleftrightarrow a=6-6r\ \cdots\cdots①)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{a}{1-R}=4\qquad (\Longleftrightarrow a=4-4R\ \cdots\cdots②)$$

①，②より，

$$3r=2R+1\ \cdots\cdots③$$

さらに，$\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{a\cdot R^{n-1}}{a\cdot r^{n-1}}=\left(\dfrac{R}{r}\right)^{n-1}$ について，$\left|\dfrac{R}{r}\right|<1$ となり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{1-\frac{R}{r}}=3\iff\frac{r}{r-R}=3\iff 2r=3R\ \cdots\cdots④$$

③，④より，$r=\dfrac{3}{5}$，$R=\dfrac{2}{5}$

$$\therefore\ a_1=b_1=(a)=\frac{12}{5}$$

$$\therefore\ r=\frac{3}{5},\ R=\frac{2}{5}\ \left(|r|<1,|R|<1 \text{をみたす}\right)$$

$$\therefore\ \frac{アイ}{ウ}=\frac{12}{5},\ \frac{エ}{オ}=\frac{3}{5},\ \frac{カ}{キ}=\frac{2}{5}$$

(2)

$$y=\cfrac{1}{2+\boxed{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

$\boxed{}=y$ と考えてよく，

$$y=\frac{1}{2+y}\iff y^2+2y-1=0\quad(\Longleftrightarrow ay^2+by+c=0)$$

$$\therefore\ a=1\ (>0),\ b=2,\ c=-1$$

これを解くと，$y=-1\pm\sqrt{2}$ となり，$y>0$ より，

$$y=-1+\sqrt{2}$$

次に，

$$x=\cfrac{2}{1+\boxed{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}\qquad \boxed{}\leftarrow(y\text{と同じ})$$

$$=\frac{2}{1+y}$$

$$=\frac{2}{1+\left(-1+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\sqrt{2}$$

$$\therefore\ ア=1,\ イ=2,\ ウエ=-1,\ オカ=-1,\ キ=2,\ ク=2$$

(3)

$$x\log 2^x-x\log 6+\log 9-\log 4=0$$

$$\iff x^2\log 2-x(\log 2+\log 3)+2(\log 3-\log 2)=0$$

$$\iff (x-2)\{\log 2\cdot x-(\log 3-\log 2)\}=0$$

$$\therefore\ x=2,\ \frac{\log 3-\log 2}{\log 2}\ \leftarrow\ x=\alpha,\beta$$

$\alpha=2$ より，

$$2^\alpha=2^2=4$$

$\beta=\dfrac{\log 3-\log 2}{\log 2}$ より，$2^\beta=2^{\frac{\log 3-\log 2}{\log 2}}=p$ とおく．

辺々対数をとり，

$$\frac{\log 3-\log 2}{\log 2}\cdot\log 2=\log p$$

$$\iff \log p=\log\frac{3}{2}\qquad\qquad \therefore\ p=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ ア=4,\ \frac{イ}{ウ}=\frac{3}{2}$$

(4)

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'+p\\y'+q\end{pmatrix}\text{より，}\begin{cases}x''=ax+by+p\\y''=cx+dy+q\end{cases}$$

条件より，

$(1,\ 0)\ \to\ (5,\ 6)$

$(0,\ 1)\ \to\ (6,\ -1)$

$(1,\ 1)\ \to\ (9,\ 3)$

に移動するから，

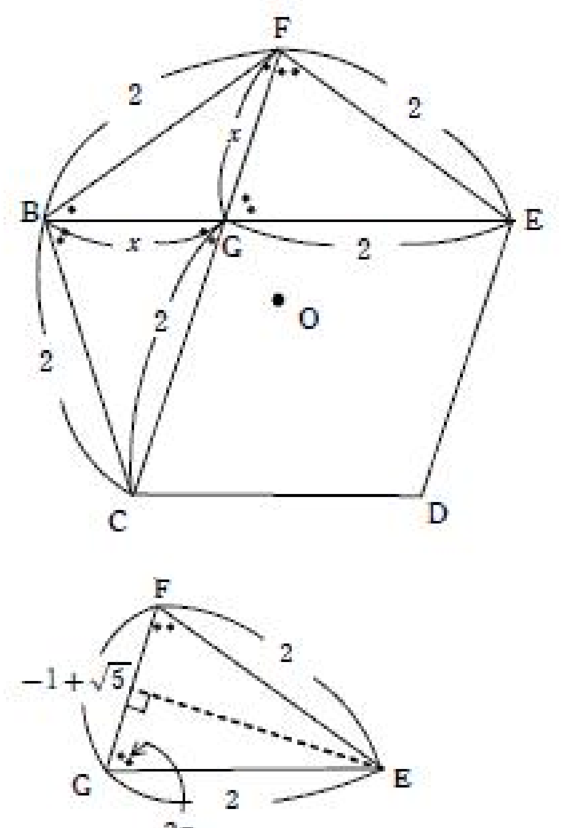
$$\begin{cases}5=a+p\\6=c+q\\6=b+p\\-1=d+q\\9=a+b+p\\3=c+d+q\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}a=3\\b=4\\c=4\\d=-3\end{cases}$$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},\quad p=2,\quad q=2$$

$$\therefore\ ア=3,\ イ=4,\ ウ=4,\ エオ=-3,\ カ=2,\ キ=2$$

(5)

$$\angle\mathrm{CBG}=\angle\mathrm{CGB}=\frac{2\pi}{5}$$



より，$\mathrm{CB}=\mathrm{CG}=2$

$\triangle\mathrm{BCF}$ と $\triangle\mathrm{GFB}$ で

$$2:x+2=x:2$$

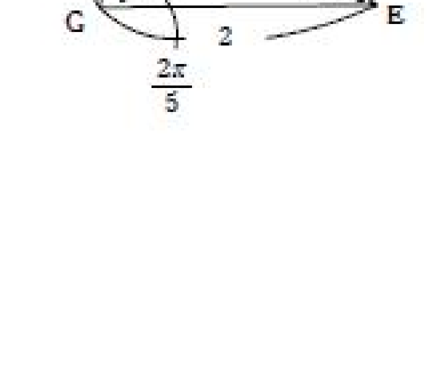
$$\iff x^2+2x-4=0$$

$$\therefore\ x=-1+\sqrt{5}\ (>0)$$

$$\therefore\ \mathrm{BE}=x+2=1+\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \mathrm{BG}=x=-1+\sqrt{5}$$

ここで，右図の三角形より，



$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

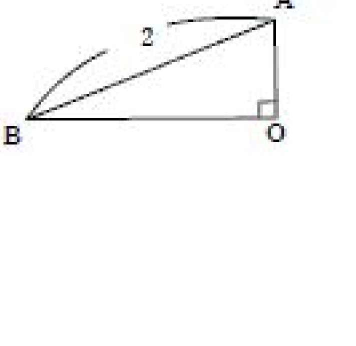
$\triangle\mathrm{OBC}$ で余弦定理を用いて（$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=y$ とする）

$$y^2+y^2-2y^2\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=4$$

$$\iff \frac{5-\sqrt{5}}{2}y^2=4$$

$$\therefore\ \mathrm{OB}^2=y^2=\frac{2\sqrt{5}+10}{5}$$

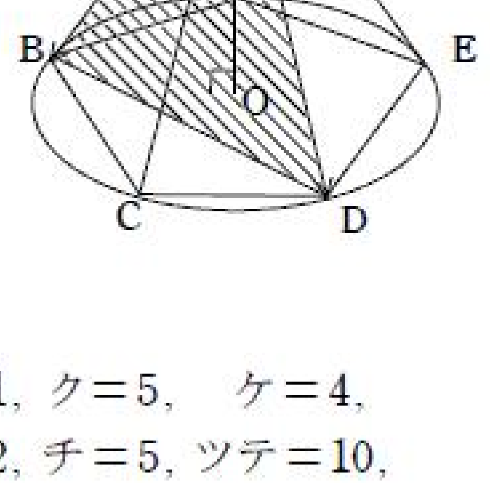
$$\mathrm{OA}^2=2^2-\mathrm{OB}^2$$



$$=4-\frac{2\sqrt{5}+10}{5}$$

$$=\frac{-2\sqrt{5}+10}{5}$$

$\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とすると，



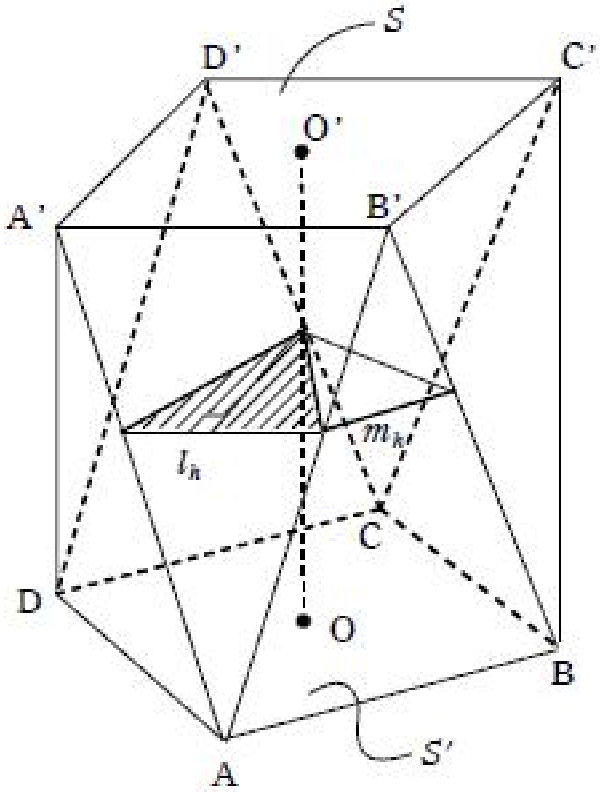
$$2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos\theta=\left(1+\sqrt{5}\right)^2$$

$$\iff \cos\theta=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\cdot2\cos\theta=1-\sqrt{5}$$

$\therefore$ ア$=1$，イ$=5$，ウエ$=-1$，オ$=5$，カキ$=-1$，ク$=5$，ケ$=4$，コ$=2$，サ$=5$，シス$=10$，セ$=5$，ソタ$=-2$，チ$=5$，ツテ$=10$，ト$=5$，ナ$=1$，ニ$=5$

II



△AA′B

h	$0 \to 3$
$O_h \sim l_h$	$\sqrt{2} \to 1$

$1-\sqrt{2}=-(\sqrt{2}-1)$ より， $a=\sqrt{2}-1$

$$(\text{増加率})=\frac{1-\sqrt{2}}{3-0}=\frac{-1}{3}a=\frac{-1}{3}a$$

$$(l_h\ の長さ)=x=\frac{2}{3}h$$

$$\left(\begin{array}{l} x:2=h:3 \\ \Longleftrightarrow 3x=2h \end{array}\right)$$

△B′AB

h	$0 \to 3$
$O_h \sim m_h$	$1 \to \sqrt{2}$

より， $\dfrac{1-\sqrt{2}}{3-0}=\dfrac{1}{3}a$

$$(m_h\ の長さ)=y=\frac{6-2h}{3}=\frac{-2}{3}h+2$$

$$\left(\begin{array}{l} y:2=3-h:3 \\ \Longleftrightarrow 3y=6-2h \end{array}\right)$$

$$\triangle S=4\cdot\left\{\frac{2}{3}h\cdot\left(-\frac{1}{3}a\right)+\left(2-\frac{2}{3}h\right)\cdot\frac{1}{3}a\right\}\cdot\triangle h$$

$$=\left(\frac{-16}{9}ah+\frac{8}{3}a\right)\cdot\triangle h$$

$$\therefore\ \triangle S=\left(\frac{-16}{9}h+\frac{8}{3}\right)a\cdot\triangle h$$

ここで，

$$S(0)=4$$

$$\therefore\ S(h)=\left(\frac{-8}{9}h^2+\frac{8}{3}h\right)a+4$$

$$V=\int_0^3 S(h)\,dh=a\left[-\frac{8}{27}h^3+\frac{4}{3}h^2\right]_0^3+[4h]_0^3$$

$$=4a+12$$

$a=\sqrt{2}-1$

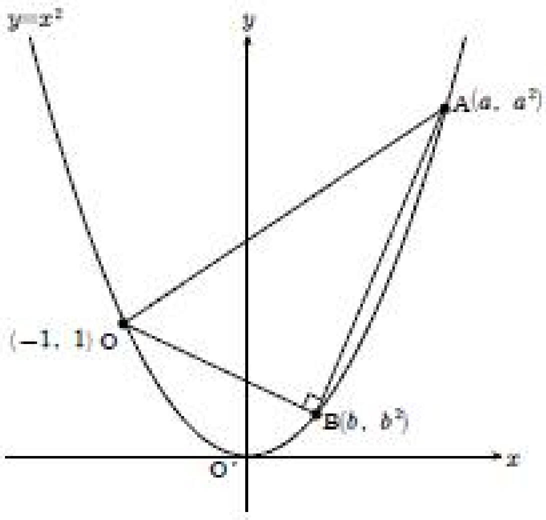
$$=4\sqrt{2}+8$$

∴ ア $=2$， イ $=1$， ウエ $=-1$， オ $=3$， カ $=2$，
キ $=3$， ク $=1$， ケ $=3$， コサ $=-2$， シ $=3$，
ス $=2$， セソタ $=-16$， チ $=9$， ツ $=8$， テ $=3$，
ト $=4$， ナニ $=-8$， ヌ $=9$， ネ $=8$， ノ $=3$，
ハ $=4$， ヒ $=4$， フヘ $=12$， ホ $=4$， マ $=2$，
ミ $=8$

III

(1) 直線 $y=ax+b$ の傾き a
直線 $y=cx+d$ の傾き c
より，
「2つの直線が直交」$\iff$「(2つの傾きの積)$=-1$」
$\therefore\ ac=-1$ (答)

(2)



$(\text{OB の傾き})=\dfrac{b^2-1}{b+1}=b-1$

$(\text{AB の傾き})=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$

ただし，$a\neq -1$，$b\neq -1$，$b\neq a$
(1)より，
$(b-1)(a+b)=-1$
$\iff b^2+(a-1)b-a+1=0$ ……①
①が $b\neq -1$，$b\neq a$ に少なくとも1つの実解をもてばよい．

$$\begin{aligned}D&=(a-1)^2-4(-a+1)\\&=a^2+2a-3\\&=(a+3)(a-1)\geqq 0\end{aligned}$$

$\therefore\ a\leqq -3,\ 1\leqq a$ ……②

(i) $b=a$ のとき
①より，
$2a^2-2a+1=0$
これをみたす実数 a は存在しない．

(ii) $a=-1$ のとき
②より，不適．

(iii) $b=-1$ のとき
①より，
$-2(a-1)=-1 \iff a=\dfrac{3}{2}$

逆に $a=\dfrac{3}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}①&\iff b^2+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}=0\\&\iff 2b^2+b-1=0\\&\iff (2b-1)(b+1)=0\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$(a,b)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，$\mathrm{OB}\perp\mathrm{AB}$ となるので適．
以上より，$a\leqq -3$，$1\leqq a$ (答)

(3) $\angle\mathrm{OBA}=90^\circ$ より，
$b^2+(a-1)b-a+1=0$

$\therefore\ b=\dfrac{1-a\pm\sqrt{a^2+2a-3}}{2}$ ……②

(2)より，異なる2つの実解をもつには，
$a<-3,\quad 1<a$ かつ $a\neq\dfrac{3}{2}$

$\angle\mathrm{BOA}=90^\circ$ より，
$(b-1)(a-1)=-1$
$\iff b=1-\dfrac{1}{a-1}\quad (a\neq 1)$ ……③

$\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$ より，
$(a-1)(a+b)=-1$
$\iff b=\dfrac{-a^2+a-1}{a-1}\quad (a\neq 1)$ ……④

直角三角形が4つできるから，$b\neq -1$ のもとで③，④より，
$a\neq 1$ で②が異なる2実解をもつこと．

$\therefore\ a<-3,\ 1<a<\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<a$ (答)