

(1) A(1, 3) と B(4, 9) を通る直線は

$$y = \frac{9-3}{4-1}(x-1) + 3 \iff y = 2x + 1$$

$$f(x) = \boxed{\frac{7}{2}}x + \boxed{\frac{1}{2}} \quad (\text{答})$$

さらに、(1, 0), (4, 0) を通る 2 次関数で、2 次の係数が 1 のものは

$$g(x) = \left(x - \boxed{\frac{5}{2}}\right)\left(x - \boxed{\frac{3}{2}}\right) \quad (\text{ただし、}\boxed{\text{ウ}} \leq \boxed{\text{エ}}) \quad (\text{答})$$

2 点 A, B を通る放物線の一般式は

$$\begin{aligned} y &= f(x) + \alpha g(x) \\ &= \boxed{\frac{5}{2}}x + \boxed{\frac{1}{2}} + \alpha \left(x^2 - \boxed{\frac{5}{2}}x + \boxed{\frac{3}{2}}\right) \quad (\alpha \neq 0) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

C(-1, 9) を代入すると

$$9 = -2 + 1 + \alpha(1 + 5 + 4)$$

$$\alpha = \boxed{1} \quad (\text{答})$$

3 点 C(-1, 9) と A(1, 3) と B(4, 9) を通る 2 次関数 ($y = ax^2 + bx + c$) は

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 + 1(x^2 - 5x + 4) \\ &= x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

$$a = \boxed{1}, b = \boxed{-3}, c = \boxed{5} \quad (\text{答})$$

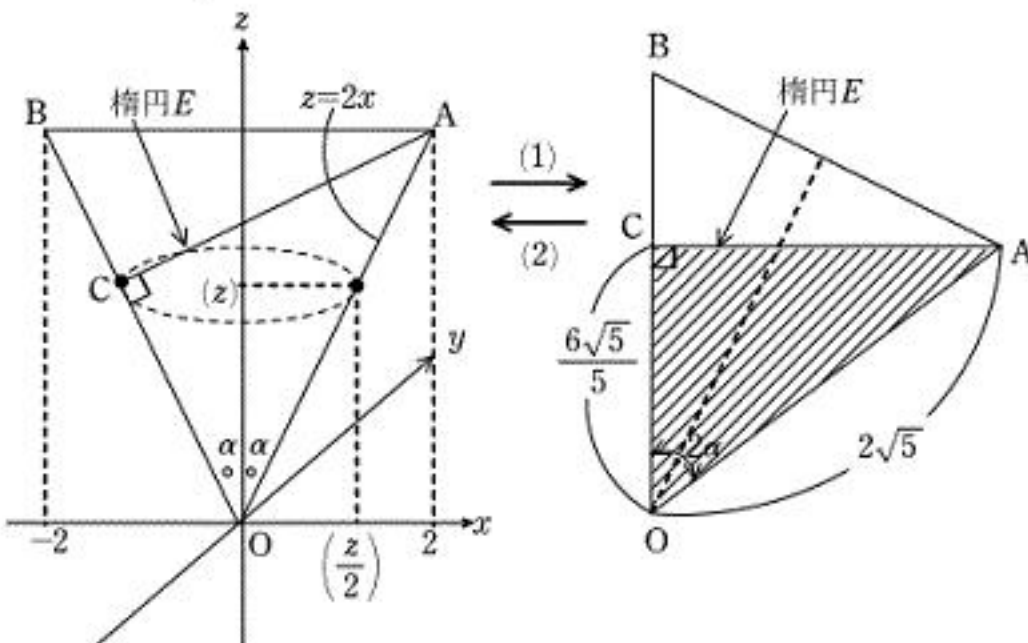
(-1, 0), (1, 0), (4, 0) を通る 3 次の係数が 1 の 3 次関数 ($y = x^3 + dx^2 + ex + f$) は

$$\begin{aligned} y &= (x+1)(x-1)(x-4) \\ &= (x^2-1)(x-4) \\ &= x^3 - 4x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

$$d = \boxed{-4}, e = \boxed{-1}, f = \boxed{4} \quad (\text{答})$$

(2)

$$(\text{水の体積}) = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 2^2) \cdot 4 = \frac{\boxed{16}}{\boxed{3}} \pi \quad (\text{答})$$



円錐の方程式は

$$x^2 + y^2 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} z^2 \quad (\text{答})$$

さらに、A(2, 0, 4) (答)

ここで $\angle AOB = 2\alpha$ とおくと、 $\cos \alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

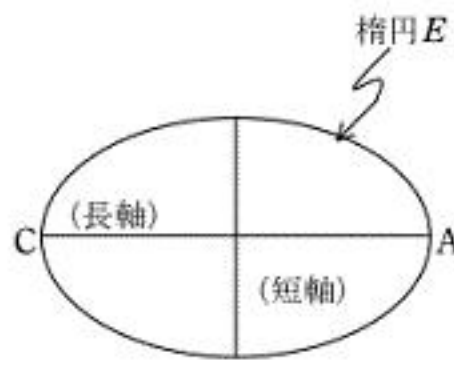
$$OC = 2\sqrt{5} \cos 2\alpha = 2\sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{これより、} C\left(\frac{6\sqrt{5}}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), 0, \frac{6\sqrt{5}}{5} \cos \alpha\right) = \left(\frac{\boxed{-6}}{\boxed{5}}, 0, \frac{\boxed{12}}{\boxed{5}}\right) \quad (\text{答})$$

楕円 E 上の点は、

$$z = \frac{4 - \frac{12}{5}}{2 - \left(-\frac{6}{5}\right)}(x-2) + 4 \iff z = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}x + \boxed{3} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (\text{長軸の長さ}) &= AC = \sqrt{\left(2 + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{12}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{320}{5^2}} \\ &= \frac{\boxed{8}}{\boxed{5}} \sqrt{\boxed{5}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



$$(\text{短軸の長さ}) = \frac{2\sqrt{15}}{5} - \left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right) = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}} \sqrt{\boxed{15}} \quad (\text{答})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{線分 AC の中点を M とすると } M\left(\frac{2}{5}, 0, \frac{16}{5}\right) \\ \text{これより、} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{5}\right)^2 \iff y^2 = \frac{60}{25} \text{ よって、} y = \pm \frac{2\sqrt{15}}{5} \end{array} \right)$$

① より、

$$OC = \frac{\boxed{6}}{\boxed{5}} \sqrt{\boxed{5}} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (\text{残る水の量}) &= \left(\pi \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{15}}{5}\right) \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{\boxed{16}}{\boxed{25}} \sqrt{\boxed{15}} \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

Q(0, s) (s > 0) とおくと

$$s^2 + t^2 = 1 \text{ よって、} s = \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{直線 PQ: } \frac{x}{t} + \frac{y}{\sqrt{1-t^2}} = 1$$

$$a = \boxed{1}, b = \boxed{-1}, c = \boxed{2} \quad (\text{答})$$

0 < t < 1 で考えてよく

$$y = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x + \sqrt{1-t^2}$$

x > 0 で固定

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -x \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot t - \sqrt{1-t^2} \cdot 1 + \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{-x(-t^2-1+t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}} + \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{x-t^3}{t^2\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

t	(0)		$\sqrt[3]{x}$		(1)
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y		↗	(最大)	↘	

t = x^{1/3} (x = t³) で y は最大となる。

$$d = \boxed{1}, e = \boxed{3} \quad (\text{答})$$

このとき、

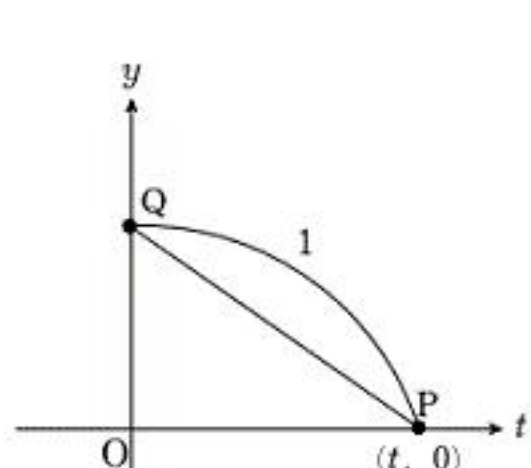
$$\frac{x}{x^{1/3}} + \frac{y}{\sqrt{1-x^{2/3}}} = 1$$

$$\iff x^{2/3} + \frac{y}{\sqrt{1-x^{2/3}}} = 1$$

$$\iff y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \left(x^{2/3} + y^{2/3} = 1\right)$$

$$f = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \quad (\text{答})$$



(4)

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (\overrightarrow{AB} \text{ と } \overrightarrow{AC} \text{ は 1 次独立})$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= x^2|\overrightarrow{AB}|^2 + y^2|\overrightarrow{AC}|^2 + 2xy|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \\ &= 12x^2 + 8y^2 + 2(6-2\sqrt{3})xy \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 12x + (6-2\sqrt{3})y = 6 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (6-2\sqrt{3})x + 8y = 4 \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\overrightarrow{AD} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{AC}$$

① より

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = 12 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + 2(6-2\sqrt{3}) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 4$$

$$|\overrightarrow{AD}| = 2 \text{ よって、} AD = \boxed{2} \quad (\text{答})$$

($\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$ より $\angle ADC = 90^\circ$ とわかる)

これより、CD = 2

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = 8 + 12 - 2(6-2\sqrt{3}) = 8 + 2\sqrt{12}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

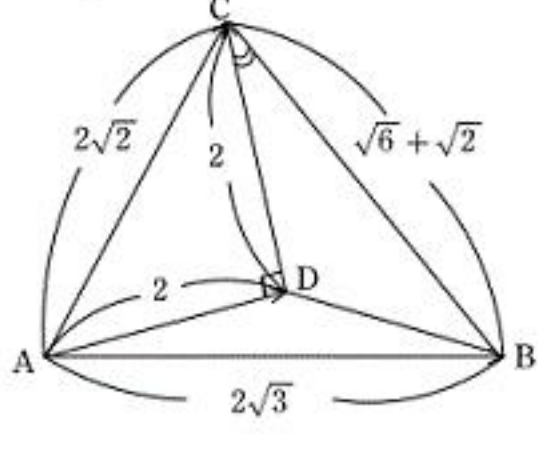
$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2, \triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot 4 - 36 = \sqrt{3}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot 8 - (6-2\sqrt{3})^2 = 3 + \sqrt{3} \text{ より、} \triangle BCD = 3 + \sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) = 1$$

よって、

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin \angle BCD = 1$$

$$\sin \angle BCD = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\boxed{6}} - \sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}} \quad (\text{答})$$



$$g'(x) = 3x^2 - 3$$

$$g''(x) = 6x$$

$$\text{変曲点} \left(\overset{\text{ア}}{\boxed{0}}, \overset{\text{イ}}{\boxed{0}} \right) \quad (\text{答})$$

$$x = \overset{\text{ウエ}}{\boxed{-1}} \text{で極大} \quad (\text{答})$$

$$x = \overset{\text{オ}}{\boxed{1}} \text{で極小}$$

$$y = g(x) - 9x = x^3 - 12x \quad \left(\begin{array}{l} \text{極大値}(-2, 16) \\ \text{極小値}(2, -16) \end{array} \right)$$

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

より、変曲点(O)を中心に
 $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ 軸方向に} \overset{\text{カ}}{\boxed{2}} \text{ 倍} \\ y \text{ 軸方向に} \overset{\text{キ}}{\boxed{8}} \text{ 倍} \end{array} \right.$

(場合 1)

$$y = g(x) - x = x^3 - 4x$$

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$y'' = 6x$$

x	...	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\swarrow$	極小	$\nearrow$

$$x \text{ 軸方向に} \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 倍だから 2 番目の } x \text{ 座標は } \frac{\overset{\text{ク}}{\boxed{2}} \sqrt{\overset{\text{ケ}}{\boxed{3}}}}{\underset{\text{コ}}{\boxed{3}}} \alpha \quad (\text{答})$$

(場合 2) 傾きを m とおいて

$$y = g(x) - mx$$

$$= x^3 - 3x - mx$$

$$= x^3 - (m+3)x$$

$$y' = 3x^2 - (m+3)$$

これより、 $x = \pm \sqrt{\frac{m+3}{3}}$ で極値をとる。よって

$$\sqrt{\frac{m+3}{3}} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{3}{4} \alpha^{-2} - 3$$

$$c = \frac{\overset{\text{サ}}{\boxed{3}}}{\underset{\text{シ}}{\boxed{4}}}, d = \overset{\text{スセ}}{\boxed{-2}}, e = \overset{\text{ソタ}}{\boxed{-3}} \quad (\text{答})$$

(場合 3)

$$y = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$= (x-1)^2(x+1)$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

$$= (3x+1)(x-1)$$

$$y'' = 6x - 2$$

x	...	$-\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\swarrow$	極小	$\nearrow$

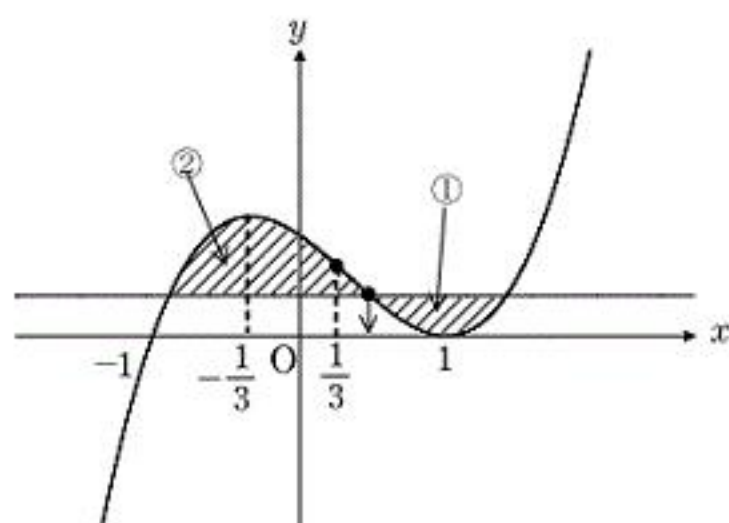
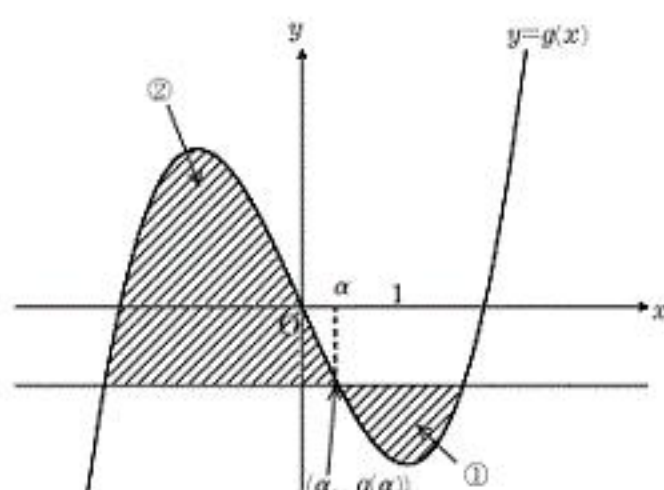
$$\frac{32}{27} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{16}{27} \right) \quad 0$$

$y = g(x)$ のグラフを x 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍、 y 軸方向に $\frac{8}{27}$ 倍し、さらに

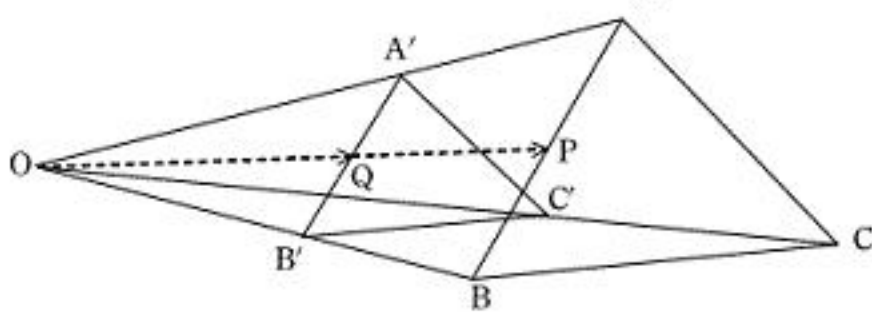
x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 、 y 軸方向に $\frac{16}{27}$ だけ平行移動したものである。

$$x = \frac{\overset{\text{チ}}{\boxed{2}}}{\underset{\text{ツ}}{\boxed{3}}} \alpha + \frac{\overset{\text{テ}}{\boxed{1}}}{\underset{\text{ト}}{\boxed{3}}} \quad (\text{答})$$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$g''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\swarrow$	極小	$\nearrow$
		2				-2	

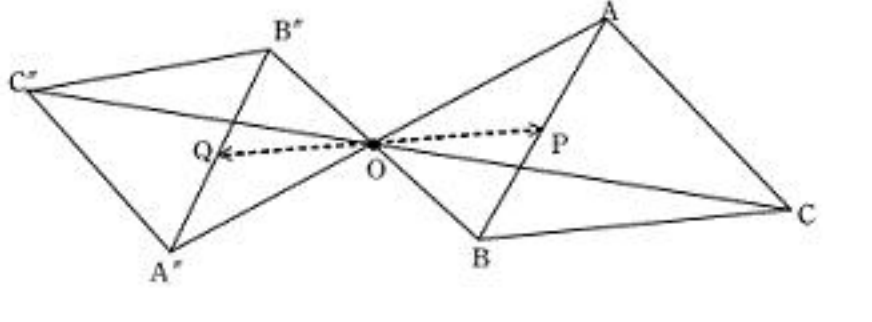


(1) $\bullet (t > 0 \text{ のとき})$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA'} = t\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB'} = t\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC'} = t\overrightarrow{OC} \end{cases} \text{ とおくと}$$

点Qは三角形A'B'C'を描く (答)
(三角形ABCを t 倍に相似拡大または相似縮小した三角形)

$\bullet (t = 0 \text{ のとき})$
点Qは点Oと一致 (答)

$\bullet (t < 0 \text{ のとき})$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA''} = t\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB''} = t\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC''} = t\overrightarrow{OC} \end{cases} \text{ とおくと}$$

点Qは三角形A''B''C''を描く (答)
(三角形ABCを $|t|$ 倍に相似拡大または相似縮小した三角形)

(2) (1)と同様に考えて
 $Q(X, Y), P(x, y) (y = x^2 + 1 \dots\dots \textcircled{1} \text{をみたす})$
 $\bullet (t > 0 \text{ のとき})$

$$\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP} \iff \begin{cases} X = tx \\ Y = ty \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{t}X \\ y = \frac{1}{t}Y \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ へ代入して

$$\frac{1}{t}Y = \frac{1}{t^2}X^2 + 1 \iff Y = \frac{1}{t}X^2 + t$$

よって、Qの軌跡の方程式は $y = \frac{1}{t}x^2 + t (t > 0)$ (答)

$\bullet (t = 0 \text{ のとき})$
Qは原点O(0, 0) (答)

$\bullet (t < 0 \text{ のとき})$
Qの軌跡の方程式は $y = \frac{1}{t}x^2 + t (t < 0)$ (答)
(別解) $\rightarrow (t > 0 \text{ として限定した場合の(1), (2)の解答})$

(1) (i) $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP}$ のとき

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA'} = t\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB'} = t\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC'} = t\overrightarrow{OC} \end{cases} (t > 0) \text{ より, } \underline{\text{点Qは三角形A'B'C'を描く}} \text{ (答)}$$

(ii) $\overrightarrow{OQ} = -t\overrightarrow{OP}$ のとき

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA''} = -t\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB''} = -t\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC''} = -t\overrightarrow{OC} \end{cases} (t > 0) \text{ より, } \underline{\text{点Qは三角形A''B''C''を描く}} \text{ (答)}$$

(2) (1)と同様にして、 $P(x, y) (y = x^2 + 1 \dots\dots \textcircled{1} \text{をみたす})$
とし、 $Q(X, Y)$ とする。
(i) $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP}$ のとき

$$\begin{cases} X = tx \\ Y = ty \end{cases} (t > 0) \text{ より, } \begin{cases} x = \frac{1}{t}X \\ y = \frac{1}{t}Y \end{cases} (t > 0)$$

$\textcircled{1}$ に代入して、 $\frac{1}{t}Y = \frac{1}{t^2}X^2 + 1 \iff Y = \frac{1}{t}X^2 + t$

よって、Qの軌跡の方程式は $y = \frac{1}{t}x^2 + t (t > 0)$ (答)

(ii) $\overrightarrow{OQ} = -t\overrightarrow{OP}$ のとき

$$\begin{cases} X = -tx \\ Y = -ty \end{cases} (t > 0) \text{ より, } \begin{cases} x = -\frac{1}{t}X \\ y = -\frac{1}{t}Y \end{cases} (t > 0)$$

$\textcircled{1}$ に代入して、 $-\frac{1}{t}Y = \frac{1}{t^2}X^2 + 1 \iff Y = -\frac{1}{t}X^2 - t$

よって、Qの軌跡の方程式は $y = -\frac{1}{t}x^2 - t (t > 0)$ (答)

(3)
$$\begin{cases} y = (x-a)^2 + b \\ y = sx \end{cases} \text{ より}$$

$$(x-a)^2 + b = sx \iff x^2 - (2a+s)x + a^2 + b = 0$$

(交点) ...
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{2 \text{ 個}} (x, y) = \left(\frac{2a+s \pm \sqrt{s^2+4as-4b}}{2}, \frac{2a+s \pm \sqrt{s^2+4as-4b}}{2}s \right) \left(\begin{array}{l} s^2+4as-4b > 0 \\ \text{のとき} \end{array} \right) \\ \boxed{1 \text{ 個}} (x, y) = \left(\frac{(2a+s)}{2}, \frac{(2a+s)s}{2} \right) \left(\begin{array}{l} s^2+4as-4b = 0 \text{ つまり} \\ s = -2a \pm \sqrt{4a^2+4b} \text{ のとき} \end{array} \right) \\ \boxed{0 \text{ 個}} (s^2+4as-4b < 0 \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{t}(x-ta)^2 + tb \\ y = sx \end{cases} \text{ より}$$

$$\frac{1}{t}(x-ta)^2 + tb = sx \iff x^2 - (2a+s)tx + (a^2+b)t^2 = 0$$

(交点) ...
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{2 \text{ 個}} (x, y) = \left(\frac{2a+s \pm \sqrt{s^2+4as-4b}}{2}t, \frac{2a+s \pm \sqrt{s^2+4as-4b}}{2}st \right) \left(\begin{array}{l} s^2+4as-4b > 0 \\ \text{のとき} \end{array} \right) \\ \boxed{1 \text{ 個}} (x, y) = \left(\frac{(2a+s)t}{2}, \frac{(2a+s)st}{2} \right) \left(\begin{array}{l} s^2+4as-4b = 0 \text{ つまり} \\ s = -2a \pm \sqrt{4a^2+4b} \text{ のとき} \end{array} \right) \\ \boxed{0 \text{ 個}} (s^2+4as-4b < 0 \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

(4) $y = x^2 + 1$ 上の点 $(t, t^2 + 1)$ での接線は、 $y' = 2x$ より
 $y = 2t(x-t) + t^2 + 1 \iff y = 2tx - t^2 + 1$
ここで、 $y = a(x-b)^2 + c$ と $y = 2tx - t^2 + 1$ を連立(ただし、 $a \neq 0$)
 $a(x-b)^2 = 2tx - t^2 + 1$
 $\iff ax^2 - 2(ab+t)x + ab^2 + t^2 + c - 1 = 0 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ が重解を持てばよいので、
 $D/4 = (ab+t)^2 - a(ab^2 + t^2 + c - 1) = 0$
 $\iff (1-a)t^2 + 2abt + a(1-c) = 0 \dots\dots \textcircled{3}$
(i) $a = 1$ のとき
 $\textcircled{3}$ より $2bt = c - 1$
 $t = \frac{c-1}{2b}$ (ただし、 $b \neq 0$)
(ii) $a \neq 1$ のとき
 $\textcircled{1}$ を満たす実数 t がただ1つに定まるから
 $D/4 = a^2b^2 - a(1-a)(1-c) = 0$
 $\iff ab^2 - 1 + c + a - ac = 0$
 $\iff ab^2 = (a-1)(c-1)$
以上(i), (ii)をまとめて

$$\begin{cases} a = 1 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a \neq 0, a \neq 1 \\ ab^2 = (a-1)(c-1) \end{cases} \text{ (答)}$$