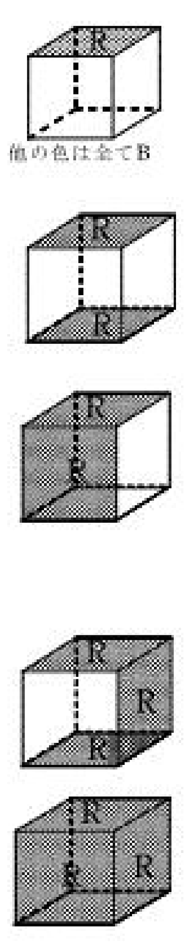
$\boxed{\text{I}}$

(1)　赤(R)，青(B) について，



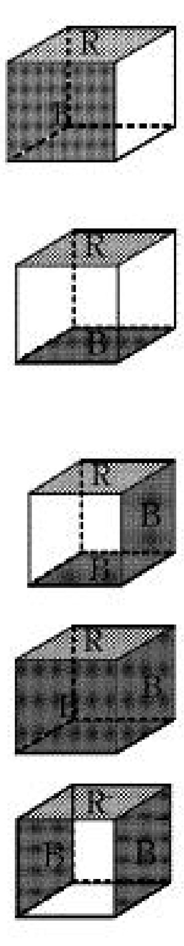
とその逆　　$\overset{ア}{\boxed{2}}$ 通り

とその逆
とその逆　　$\overset{イ}{\boxed{4}}$ 通り

1 通り
1 通り　　$\overset{ウ}{\boxed{2}}$ 通り

$2+4+2=\overset{エ}{\boxed{8}}$ 通り

赤(R)，青(B)，黄(Y)について，



4 枚の黄(Y)を赤(R)，青(B)に入れ替えた 3 通り

4 枚の黄(Y)を赤(R)，青(B)に入れ替えた 3 通り　　$\overset{オ}{\boxed{6}}$ 通り

3 色を入れ替えた 6 通り

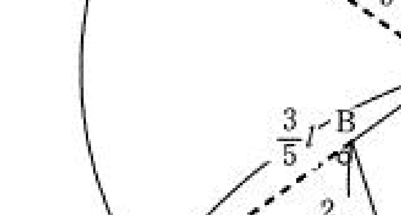
3 色を入れ替えた 6 通り

3 色を入れ替えた 6 通り　　$\overset{カキ}{\boxed{18}}$ 通り

$6+18+5=\overset{ケコ}{\boxed{30}}$ 通り

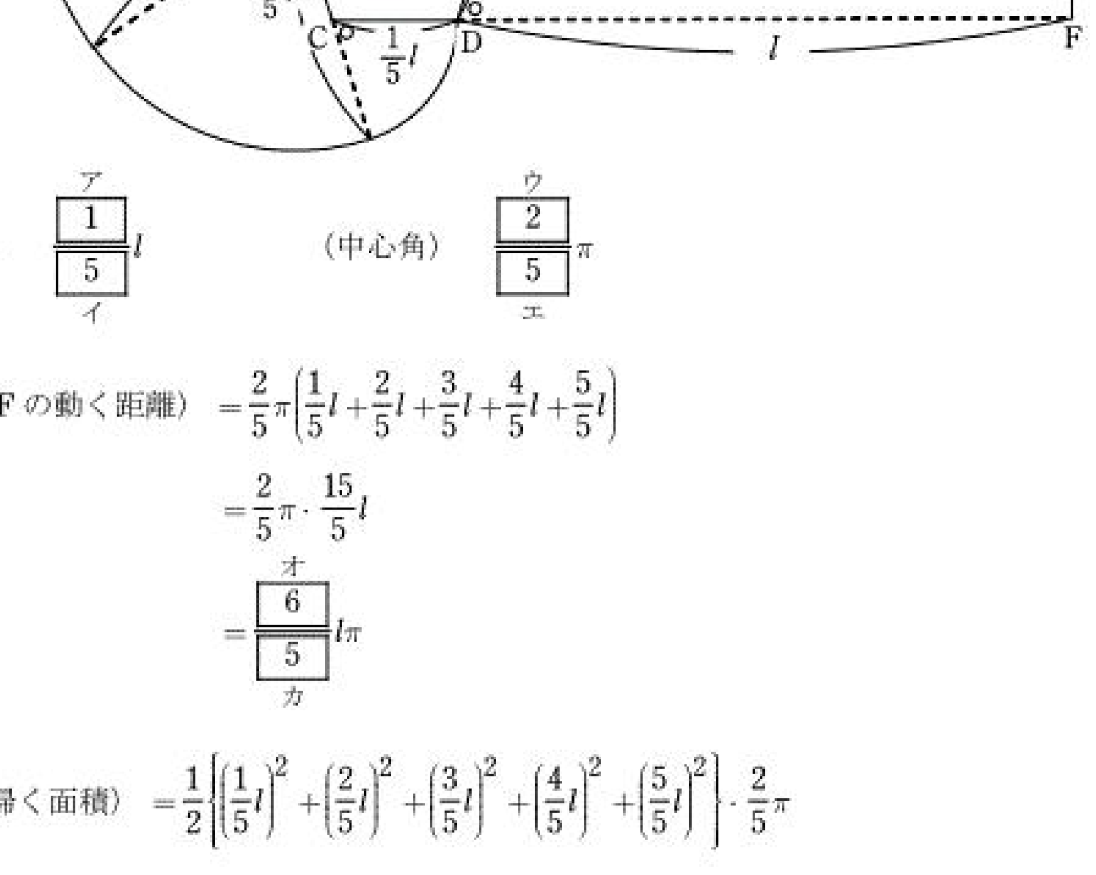
の 1 通り

上下の赤(R)の位置を青(B)，黄(Y)に入れ替えた 3 通り　　$\overset{ク}{\boxed{6}}$ 通り



の 2 通り

(2)



(半径)　$\dfrac{\overset{ア}{\boxed{1}}}{\underset{イ}{\boxed{5}}}l$　　　(中心角)　$\dfrac{\overset{ウ}{\boxed{2}}}{\underset{エ}{\boxed{5}}}\pi$

(動点 F の動く距離)
$$=\frac{2}{5}\pi\left(\frac{1}{5}l+\frac{2}{5}l+\frac{3}{5}l+\frac{4}{5}l+\frac{5}{5}l\right)$$
$$=\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{15}{5}l$$
$$=\frac{\overset{オ}{\boxed{6}}}{\underset{カ}{\boxed{5}}}l\pi$$

(糸が掃く面積)
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}l\right)^2+\left(\frac{2}{5}l\right)^2+\left(\frac{3}{5}l\right)^2+\left(\frac{4}{5}l\right)^2+\left(\frac{5}{5}l\right)^2\right\}\cdot\frac{2}{5}\pi$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{55}{25}l^2\cdot\frac{2}{5}\pi$$
$$=\frac{\overset{キク}{\boxed{11}}}{\underset{ケコ}{\boxed{25}}}l^2\pi$$

正 n 角形の 1 つの外角は　$\pi-\dfrac{(n-2)\pi}{n}=\dfrac{2}{n}\pi$

(動点 F の動く距離)
$$=\frac{2}{n}\pi\left(\frac{1}{n}l+\frac{2}{n}l+\frac{3}{n}l+\cdots+\frac{n}{n}l\right)$$
$$=\frac{2}{n}\pi\cdot\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n}l$$
$$=\frac{n+1}{n}l\pi$$
より，　$a=\overset{サ}{\boxed{1}}$，$b=1$

(糸が掃く面積)
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}l\right)^2+\left(\frac{2}{n}l\right)^2+\left(\frac{3}{n}l\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}l\right)^2\right\}\cdot\frac{2}{n}\pi$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{n^2}l^2\cdot\frac{2}{n}\pi$$
$$=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}l^2\pi$$
より，　$c=\dfrac{\overset{シ}{\boxed{1}}}{\underset{ス}{\boxed{3}}}$，$d=\dfrac{1}{2}$，$e=\dfrac{1}{6}$

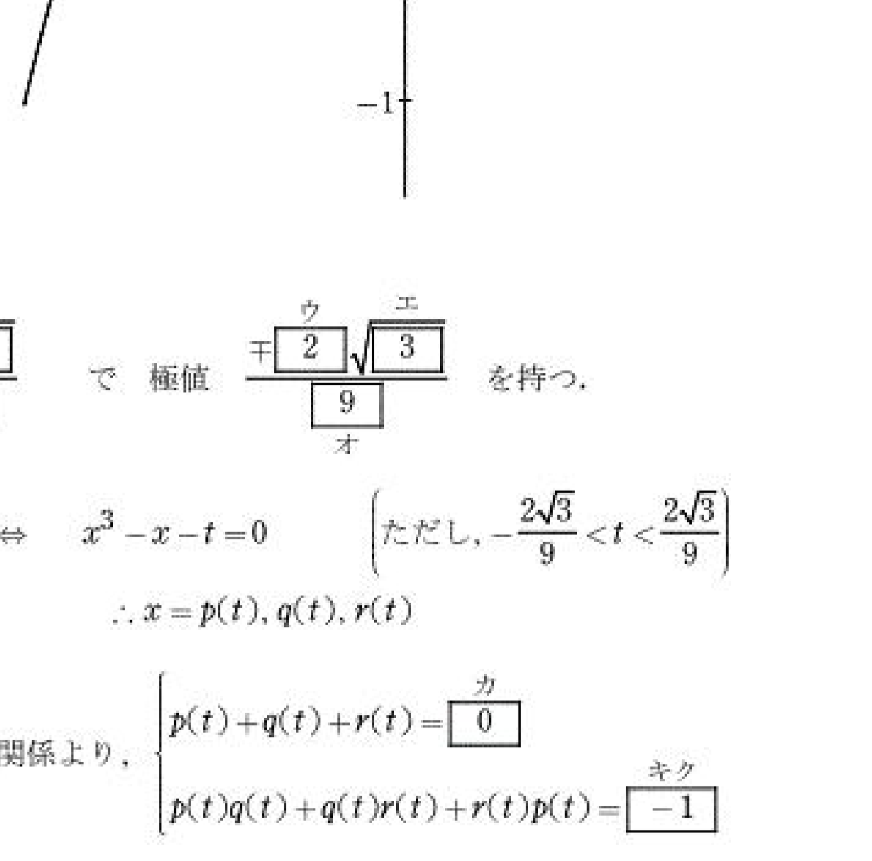
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}l\pi=l\pi$　より，$f=\overset{セ}{\boxed{1}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}l^2\pi=\frac{1}{3}l^2\pi$　より，$g=\dfrac{\overset{ソ}{\boxed{1}}}{\underset{タ}{\boxed{3}}}$

(3)　　$f(x)=x^3-x$　　(奇関数)

$f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	(極大)	↘	(極小)	↗



$x=\dfrac{\pm\sqrt{\overset{ア}{\boxed{3}}}}{\underset{イ}{\boxed{3}}}$　で　極値　$\dfrac{\mp\overset{ウ}{\boxed{2}}\sqrt{\overset{エ}{\boxed{3}}}}{\underset{オ}{\boxed{9}}}$　を持つ．

$x^3-x=t\iff x^3-x-t=0$　　$\left(ただし，-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}<t<\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

$\therefore x=p(t),q(t),r(t)$

解と係数の関係より，$\begin{cases}p(t)+q(t)+r(t)=\overset{カ}{\boxed{0}}\\ p(t)q(t)+q(t)r(t)+r(t)p(t)=\overset{キク}{\boxed{-1}}\end{cases}$

$$G(t)=\int_{p(t)}^{q(t)}\left(x^3-x-t\right)dx-\int_{q(t)}^{r(t)}\left(x^3-x-t\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-tx\right]_{p(t)}^{q(t)}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-tx\right]_{q(t)}^{r(t)}$$
$$=\frac{q(t)^4}{2}-q(t)^2-2tq(t)-\frac{p(t)^4}{4}+\frac{p(t)^2}{2}+tp(t)-\frac{r(t)^4}{4}+\frac{r(t)^2}{2}+tr(t)$$
$$G'(t)=2q'(t)\{\underbrace{q(t)^3-q(t)-t}_{0}\}-2q(t)-p'(t)\{\underbrace{p(t)^3-p(t)-t}_{0}\}+p(t)$$
$$-r'(t)\{\underbrace{r(t)^3-r(t)-t}_{0}\}+r(t)=\underbrace{\{r(t)-q(t)\}-\{q(t)-p(t)\}}_{\overset{ケ}{\boxed{d}}}$$

(Δt　増加にともなう微小変化に注目しても求められる)

$$=\overset{コサ}{\boxed{-3}}\,\underbrace{\overset{シ}{\boxed{b}}}_{q(t)}$$

ここで，　　$G'(t)=1\iff -3q(t)=1\iff q(t)=-\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\ t=f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}=\frac{\overset{ス}{\boxed{8}}}{\underset{セソ}{\boxed{27}}}$$

(4)　　$F(x)=f(x-t)=a(x-t)^4+b(x-t)^2+c$　　($a>0$，$3\leqq a\leqq 6$)

↑ (空欄形式から判断)

$F'(x)=4a(x-t)^3+2b(x-t)$

$=2(x-t)\left\{2a(x-t)^2+b\right\}$　……　①

次に，　$f(x)=ax^4+bx^2+c$　(偶関数)　($a>0$)　について考える．

$f'(x)=4ax^3+2bx$

$=4ax\left(x^2+\dfrac{b}{2a}\right)$ ←

$=4ax\left(x+\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)$

($g(t)$ は $\alpha\leqq t\leqq\beta$ で $g(t)=\dfrac{3}{2}$　(一定)
$h(t)$ は $\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq\dfrac{15}{2}$ で $h(t)=-\dfrac{57}{16}$　(一定)
より，極大値と極小値をもつ
よって，$b<0$ は必要である．)

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{-b}{2a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	(極小)	↗	(極大)	↘	(極小)	↗

$$\begin{cases}f(0)=c=\dfrac{3}{2}\\ f\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)=\dfrac{ab^2}{4a^2}-\dfrac{b^2}{2a}+c=-\dfrac{57}{16}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}c=\dfrac{3}{2}\\ b^2=\dfrac{81}{4}a\end{cases}\quad\cdots\cdots②$$

①と　$\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq\dfrac{15}{2}$　で　$h(t)=-\dfrac{57}{16}$　より，

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}+\dfrac{3}{2}=3\\ -\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}+\dfrac{15}{2}=6\end{cases}\qquad\therefore\ -b=\frac{9}{2}a\quad\cdots\cdots③$$

②，③より，　$a^2=a$　　$\therefore\ a=\overset{ア}{\boxed{1}}(>0)$，$b=\dfrac{\overset{イウ}{\boxed{-9}}}{\underset{エ}{\boxed{2}}}$，$c=\dfrac{\overset{オ}{\boxed{3}}}{\underset{カ}{\boxed{2}}}$

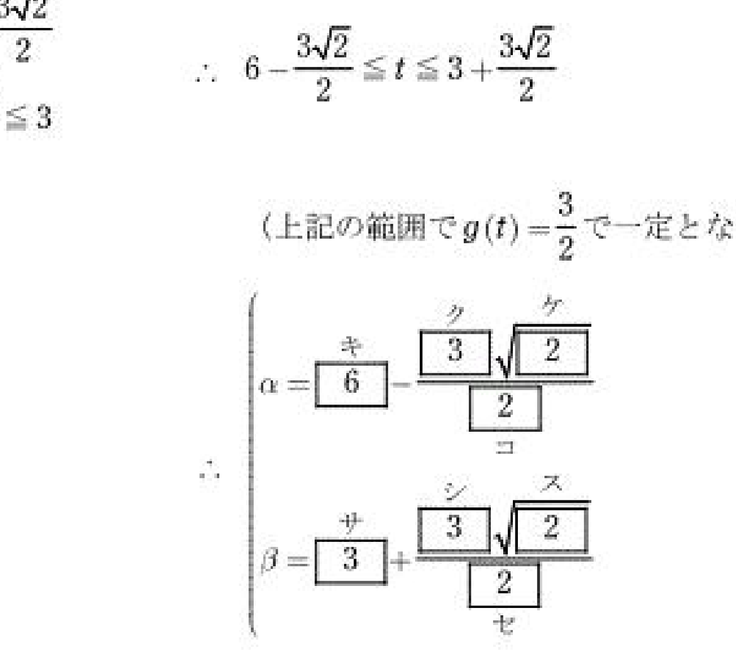
逆にこのとき，

$f(x)=x^4-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$

$f'(x)=4x^3-9x$

$=4x\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{57}{16}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{57}{16}$	↗



$$\begin{cases}6\leqq t+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ t-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq 3\end{cases}\qquad\therefore\ 6-\frac{3\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq 3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(上記の範囲で $g(t)=\dfrac{3}{2}$ で一定となる)

$$\therefore\ \begin{cases}\alpha=\overset{キ}{\boxed{6}}-\dfrac{\overset{ク}{\boxed{3}}\sqrt{\overset{ケ}{\boxed{2}}}}{\underset{コ}{\boxed{2}}}\\ \beta=\overset{サ}{\boxed{3}}+\dfrac{\overset{シ}{\boxed{3}}\sqrt{\overset{ス}{\boxed{2}}}}{\underset{セ}{\boxed{2}}}\end{cases}$$

Ⅱ

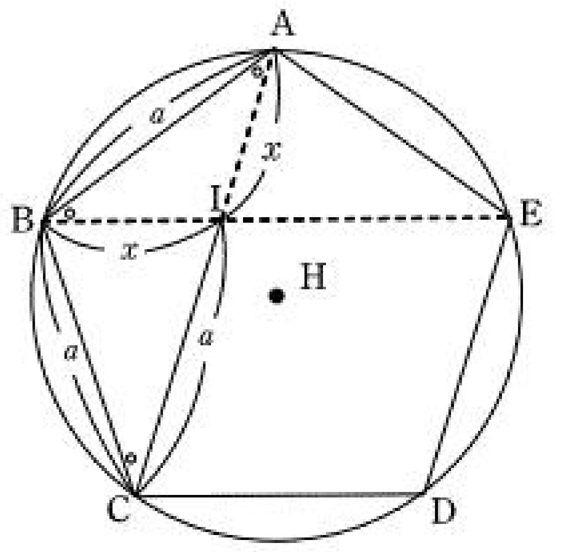
AB $= a (>0)$ とおく．IA $=$ IB $= x (>0)$

△IAB ∽ △BCA より，

$$x : a = a : a + x$$

$$\Leftrightarrow \quad ax + x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + ax - a^2 = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{-a+\sqrt{5}a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$



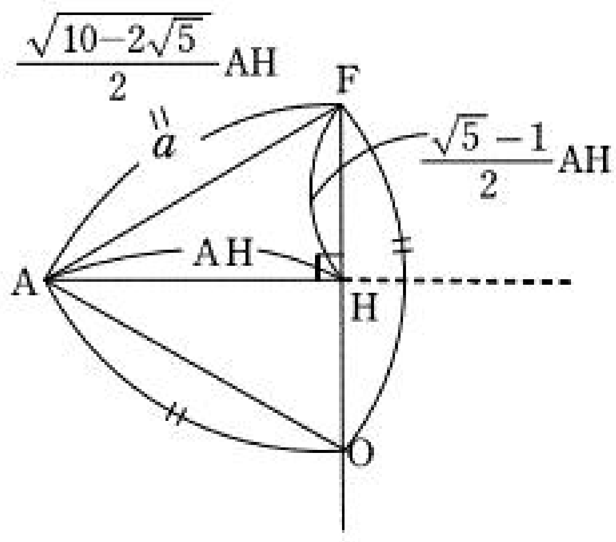
$$\therefore\ \mathrm{AC} = x + a = \frac{\overset{ア}{\boxed{1}} + \sqrt{\overset{イ}{\boxed{5}}}}{\underset{ウ}{\boxed{2}}}\mathrm{AB}$$

これより，　$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\overset{エ}{\boxed{1}} + \sqrt{\overset{オ}{\boxed{5}}}}{\underset{カ}{\boxed{4}}}$

$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

△ABC で正弦定理より，

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = 2\mathrm{AH}$$



$$\Leftrightarrow \quad a(=\mathrm{AB}) = \frac{\sqrt{\overset{キク}{\boxed{10}} - \overset{ケ}{\boxed{2}}\sqrt{\overset{コ}{\boxed{5}}}}}{\underset{サ}{\boxed{2}}}\mathrm{AH}$$

$$\mathrm{FH}^2 = a^2 - \mathrm{AH}^2$$

$$= \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4} - 1\right)\mathrm{AH}^2$$

$$= \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\mathrm{AH}^2 \qquad \therefore\ \mathrm{FH} = \frac{\overset{シス}{\boxed{-1}} + \sqrt{\overset{セ}{\boxed{5}}}}{\underset{ソ}{\boxed{2}}}\mathrm{AH}$$

△OAH で三平方の定理より，

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{OH}^2 = \left(\mathrm{OH} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{AH}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{AH}^2 + \mathrm{OH}^2 = \mathrm{OH}^2 + (\sqrt{5}-1)\mathrm{OH}\cdot\mathrm{AH} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\mathrm{AH}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{AH}^2 = (\sqrt{5}-1)\mathrm{OH}\cdot\mathrm{AH}$$

$$\therefore\ \mathrm{HO} = \frac{\overset{タ}{\boxed{1}}}{\underset{チ}{\boxed{2}}}\mathrm{AH}$$

$$\therefore\ \mathrm{FO} = \mathrm{HO} + \mathrm{FH} = \frac{1}{2}\mathrm{AH} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{\overset{ツ}{\boxed{5}}}}{\underset{テ}{\boxed{2}}}\mathrm{AH}$$

さらに，　$\mathrm{FG} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{\overset{ト}{\boxed{3}}}}{\underset{ナ}{\boxed{3}}}\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{\overset{ニヌ}{\boxed{30}} - \overset{ネ}{\boxed{6}}\sqrt{\overset{ノ}{\boxed{5}}}}}{\underset{ハ}{\boxed{6}}}\mathrm{AH}$

$$\mathrm{GO}^2 = \mathrm{OF}^2 - \mathrm{FG}^2$$

$$= \frac{5}{4}\mathrm{AH}^2 - \frac{30-6\sqrt{5}}{36}\mathrm{AH}^2$$

$$= \frac{5+2\sqrt{5}}{12}\mathrm{AH}^2$$

$$= \frac{5+2\sqrt{5}}{12}\cdot\frac{4}{10-2\sqrt{5}}\mathrm{AB}^2$$

$$= \frac{14+2\sqrt{45}}{48}\mathrm{AB}^2$$

$$\therefore\ \mathrm{GO} = \frac{\overset{ヒ}{\boxed{3}}\sqrt{\overset{フ}{\boxed{3}}} + \sqrt{\overset{ヘホ}{\boxed{15}}}}{\underset{マミ}{\boxed{12}}}\mathrm{AB}$$

（表面積）$= \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot 20 = \overset{ム}{\boxed{5}}\sqrt{\overset{メ}{\boxed{3}}}\mathrm{AB}^2$

（体積）$= \left(\dfrac{5\sqrt{3}\mathrm{AB}^2}{20}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\mathrm{AB}\cdot\dfrac{1}{3}\right)\cdot 20$

$$= \frac{\overset{モヤ}{\boxed{15}} + \overset{ユ}{\boxed{5}}\sqrt{\overset{ヨ}{\boxed{5}}}}{\underset{ラリ}{\boxed{12}}}\mathrm{AB}^3$$

III

(1) $(|x|+|y|)^2-|x+y|^2$

$=x^2+y^2+2|xy|-(x^2+y^2+2xy)$

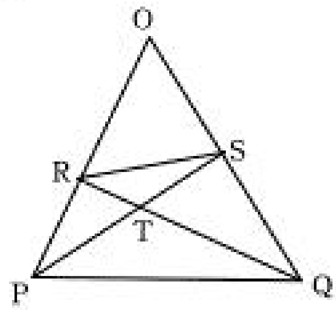
$=2(|xy|-xy)\geqq 0$

つまり，$(|x|+|y|)^2\geqq|x+y|^2$　　　$\therefore |x+y|\leqq|x|+|y|$（証明終）

（等号成立は，$xy\geqq 0$ のとき）

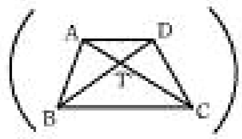
(2) PS と QR の交点を T とおくと，

三角不等式を用いて（等号に注意）



$$\begin{array}{rl} & TP+TQ\geqq PQ \\ +) & TS+TR\geqq RS \\ \hline & PS+QR\geqq PQ+RS \end{array}$$
（証明終）

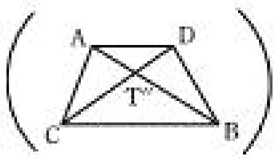
(3) ● AB と CD が四角形を作るとき



(2) より，$AB+CD\leqq AC+BD\leqq AC+BD+AD+BC$

$\therefore\ AB+CD\leqq AC+BD+AD+BC$ ……①

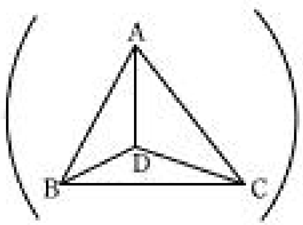
● AB と CD が交わるとき



$$\begin{array}{rl} & AB\leqq CA+CB \\ & AB\leqq DA+DB \\ & CD\leqq AC+AD \\ +) & CD\leqq BC+BD \\ \hline & AB+AB+CD+CD\leqq CA+CB+DA+DB+AC+AD+BC+BD \end{array}$$

$\therefore\ AB+CD\leqq AC+BD+AD+BC$ ……②

● △ABC 内に D が存在するとき



$$\begin{array}{rl} & AB\leqq AD+BD \\ +) & CD\leqq AC+BC \\ \hline & AB+CD\leqq AC+BD+AD+BC \end{array}$$
……③

①，②，③より題意は示された（証明終）

(4) 等号成立は A と C，B と D がそれぞれ一致するとき，または，A と D，B と C がそれぞれ一致するとき，または 4 点が一致するとき。