

1

(1) (a)

$$\begin{cases} z = \cos \frac{2}{7} \pi + i \sin \frac{2}{7} \pi \\ z^2 = \cos \frac{4}{7} \pi + i \sin \frac{4}{7} \pi \\ z^4 = \cos \frac{8}{7} \pi + i \sin \frac{8}{7} \pi \end{cases}$$

$$w = z + z^2 + z^4 = \cos \frac{2}{7} \pi + \cos \frac{4}{7} \pi + \cos \frac{8}{7} \pi + i \left(\sin \frac{2}{7} \pi + \sin \frac{4}{7} \pi + \sin \frac{8}{7} \pi \right)$$

$$\bar{w} = \cos \frac{2}{7} \pi + \cos \frac{4}{7} \pi + \cos \frac{8}{7} \pi - i \left(\sin \frac{2}{7} \pi + \sin \frac{4}{7} \pi + \sin \frac{8}{7} \pi \right)$$

となり、

$$|z| = 1, |z|^2 = z\bar{z} = 1, \underline{z^7 = 1}$$

さらに、

$$z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$z \neq 1$ なので、

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1)$$

$$w + \bar{w} = (z + z^2 + z^4) + (\bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4)$$

$$= (z + z^2 + z^4) + (z^6 + z^5 + z^3)$$

$$= \boxed{-1} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$w \cdot \bar{w} = (z + z^2 + z^4) \cdot (z^6 + z^5 + z^3)$$

$$= z^7 + z^6 + z^4 + z^8 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7$$

$$\downarrow (z^7 = 1)$$

$$= 1 + z^6 + z^4 + z + 1 + z^5 + z^3 + z^2 + 1$$

$$= \underline{z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + 2}$$

$$\parallel$$

$$= \boxed{2}$$

ここで、

$$w + \bar{w} = 2 \left(\cos \frac{2}{7} \pi + \cos \frac{4}{7} \pi + \cos \frac{8}{7} \pi \right) = -1$$

$$\therefore \cos \frac{2}{7} \pi + \cos \frac{4}{7} \pi + \cos \frac{8}{7} \pi = \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$$

次に、

$$w \cdot \bar{w} = |w|^2 = \left(\cos \frac{2}{7} \pi + \cos \frac{4}{7} \pi + \cos \frac{8}{7} \pi \right)^2 + \left(\sin \frac{2}{7} \pi + \sin \frac{4}{7} \pi + \sin \frac{8}{7} \pi \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\sin \frac{2}{7} \pi + \sin \frac{4}{7} \pi + \sin \frac{8}{7} \pi \right)^2 = 2$$

ここで、

$$\sin \frac{2}{7} \pi + \sin \frac{4}{7} \pi + \sin \frac{8}{7} \pi = \left(\sin \frac{2}{7} \pi - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \sin \frac{4}{7} \pi > 0$$

より、

$$\sin \frac{2}{7} \pi + \sin \frac{4}{7} \pi + \sin \frac{8}{7} \pi = \frac{\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

(b)

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{3} - i}{2} \end{cases}$$

より、

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1)i \}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} (1 + i)$$

$$\therefore |\alpha + \beta| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{\boxed{6}} - \sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

さらに、

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2} \{ -(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} + 1)i \}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} (-1 + i)$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{\boxed{6}} + \sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

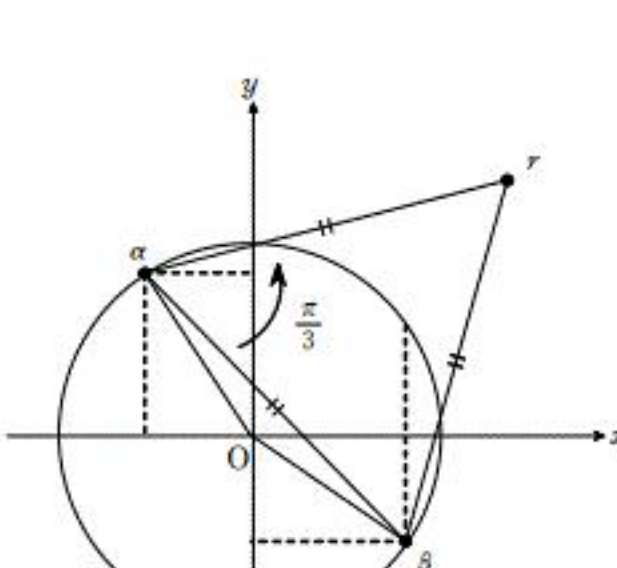
γ の実部は正より、図のような位置関係であれば良いから、

$$\gamma - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\beta - \alpha)$$

$$\iff \gamma = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2} (1 - i) + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \{ (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i \} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}} i$$



(2)

$$1) x \in A_1 \xrightarrow{\times} x \in A_2 \quad (\text{必要条件}) \quad \boxed{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\text{桁} \dots\dots 8 \cdot 7 = 56 \\ 3\text{桁} \dots\dots 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \\ 4\text{桁} \dots\dots 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680 \end{array} \right\} \boxed{2072} \text{ 個} \leftarrow (A \text{ の要素の個数})$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\text{桁} \dots\dots 8 \cdot 6 = 48 \\ 3\text{桁} \dots\dots 8 \cdot 6 \cdot 4 = 192 \\ 4\text{桁} \dots\dots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384 \end{array} \right\} \boxed{624} \text{ 個} \leftarrow (A_1 \text{ の要素の個数})$$

$$\boxed{240} \text{ 個} \leftarrow (A_2 \text{ の要素の個数})$$

4) A の要素の2桁(56個), 3桁(336個) で 392 個なので、

4桁の小さい方から数えて、 $600 - 392 = 208$ 番目を考える。

$$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1} \dots\dots 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \text{ 個}$$

$$\textcircled{1} \quad 1234, \sim, \textcircled{208} \quad 1874, \textcircled{209} \quad 1875, \textcircled{210} \quad 1876 \quad \therefore \boxed{1874}$$

(3)

$$\begin{cases} x = \sin 8\theta = 0 \\ y = \sin 6\theta = 1 \end{cases} \quad (0 \leq 8\theta \leq 8\pi, 0 \leq 6\theta \leq 6\pi) \quad \theta = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \pi \leftarrow (A)$$

$$\begin{cases} x = \sin 8\theta = 0 \\ -1 < y = \sin 6\theta < 0 \end{cases} \quad (0 \leq 8\theta \leq 8\pi, 0 \leq 6\theta \leq 6\pi) \quad \theta = \frac{\boxed{5}}{\boxed{8}} \pi, \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}} \pi \leftarrow (B)$$

このとき、

$$\beta = \sin \frac{15}{4} \pi = \sin \frac{21}{4} \pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\boxed{-}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{2}}$$

ここで、求める面積を S とすると、

$$x = \sin 8\theta \geq 0 \text{ より、}$$

$$\frac{3}{4} \pi \leq \theta \leq \frac{7}{8} \pi \iff 6\pi \leq 8\theta \leq 7\pi \text{ のときであり、}$$

$$S = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{8}\pi} x dy$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{8}\pi} \sin 8\theta \cdot 6 \cos 6\theta d\theta$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{8}\pi} 6 \cdot \frac{1}{2} \{ \sin(8\theta + 6\theta) + \sin(8\theta - 6\theta) \} d\theta$$

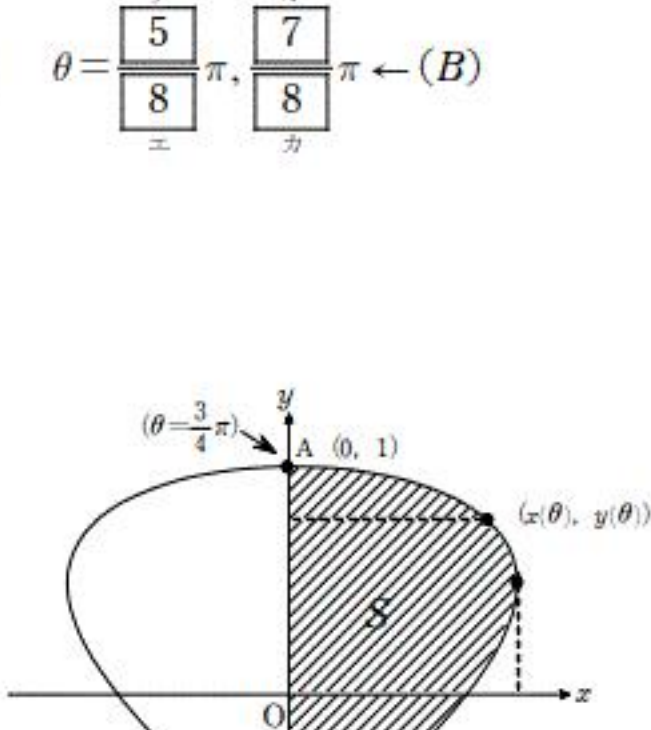
$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{8}\pi} \boxed{3} \left(\sin \frac{\boxed{7}}{\boxed{2}} \theta + \sin \frac{\boxed{14}}{\boxed{4}} \theta \right) d\theta$$

$$\left(\text{ただし、} b = \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}} \pi, t = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \pi \right)$$

$$= 3 \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{14} \cos 14\theta \right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}$$

$$= \frac{6}{7} \sqrt{2}$$

$$\therefore 2S = \frac{\boxed{12}}{\boxed{7}} \sqrt{\boxed{2}}$$



Ⅱ
(1)

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 3$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - 12 = \frac{3}{4}(x_n - 12)$$

数列 $\{x_n - 12\}$ は 初項 $x_1 - 12 = 3 - 12 = -9$, 公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列

$$x_n - 12 = -9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow x_n = 12 - 9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \therefore x_2 = \frac{\overset{\text{アイ}}{21}}{\underset{\text{ウ}}{4}}, \quad x_3 = \frac{\overset{\text{エオカ}}{111}}{\underset{\text{キク}}{16}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 - 9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right\} = \boxed{\overset{\text{ケコ}}{12}}$$

(2)

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}[x_n] + 3 \quad \therefore x_2 = \frac{21}{4}, \quad x_3 = \frac{\overset{\text{サシ}}{27}}{\underset{\text{ス}}{4}}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	...
$\frac{12}{4}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{30}{4}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{36}{4}$	$\frac{39}{4}$	$\frac{39}{4}$	$\frac{39}{4}$	$\frac{39}{4}$	...

(同じ計算の繰り返し)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\overset{\text{セン}}{39}}{\underset{\text{ソ}}{4}}$$

(3)

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+x_n} \quad x_1 = \frac{1}{2} \text{ より, 帰納的に } x_n > 0$$

$$\therefore \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1+x_n}{3x_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3}$$

$$\downarrow y_n = \frac{1}{x_n} \text{ とおく } \quad \left(y = \frac{1}{x_1} = 2 \right)$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(y_n - \frac{1}{2}\right)$$

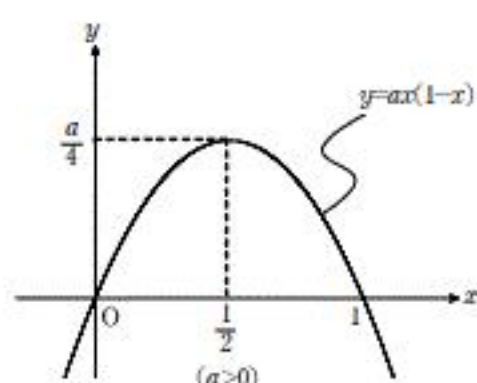
数列 $\left\{y_n - \frac{1}{2}\right\}$ は, 初項 $y_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列

$$y_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \therefore \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\left(x_n = \frac{2 \cdot 3^n}{3^n + 9} \right)$$

$$\therefore x_5 = \frac{2 \cdot 3^5}{3^5 + 9} = \frac{\overset{\text{チツ}}{27}}{\underset{\text{テト}}{14}}, \quad x_9 = \frac{2 \cdot 3^9}{3^9 + 9} = \frac{\overset{\text{ナニヌネ}}{2187}}{\underset{\text{ノハヒフ}}{1094}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{9}{3^n}} = \boxed{\overset{\text{ヘ}}{2}}$$



(4)

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) \quad (0 \leq x_1 \leq 1)$$

$0 \leq x_n \leq 1$ のためには, $a \geq 0$ かつ $\frac{a}{4} \leq 1 \quad (0 \leq a \leq 4)$
 が必要で, このとき $0 \leq x_n \leq 1$ をみताす.

$$\therefore \boxed{\overset{\text{ホ}}{0}} \leq a \leq \boxed{\overset{\text{マ}}{4}}$$

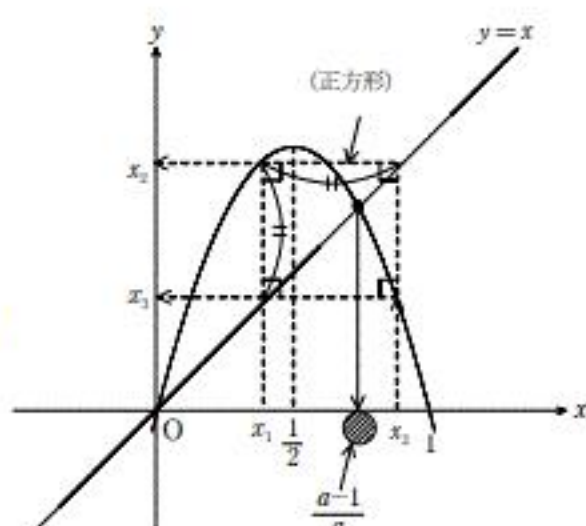
次に $a > 0$ で, $x_2 = x_1 \Leftrightarrow ax_1(1-x_1) = x_1$
 $\downarrow (x_1 \neq 0 \text{ つまり } 0 < x_1 \leq 1)$
 $\Leftrightarrow a(1-x_1) = 1$
 $\Leftrightarrow x_1 = 1 - \frac{1}{a}$

ここで, $0 < 1 - \frac{1}{a} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < a \quad \therefore \boxed{\overset{\text{ミ}}{1}} < a \leq 4$

このとき, $x_1 = \boxed{\overset{\text{ム}}{1}} - \frac{\overset{\text{メ}}{1}}{\underset{\text{ア}}{a}}$

さらに $a > 0$ で, $ax(1-x) = x \quad (0 < x < 1)$
 $\Leftrightarrow ax^2 + (1-a)x = 0$
 $\Leftrightarrow ax\left(x + \frac{1-a}{a}\right) = 0 \quad \therefore x = \frac{a-1}{a}$

ここで, $\frac{1}{2} < \frac{a-1}{a}$
 $\Leftrightarrow a < 2a - 2$
 $\Leftrightarrow 2 < a \cdots \cdots \textcircled{1}$



右図より, $x_2 - x_1 = x_2 - x_1$
 $\Leftrightarrow ax_1(1-x_1) - ax_2(1-x_2) = x_2 - x_1$
 $\Leftrightarrow ax_1 - ax_1^2 - ax_2 + ax_2^2 = x_2 - x_1$
 $\Leftrightarrow a(x_2^2 - x_1^2) - a(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0$
 $\Leftrightarrow a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - a(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0$
 $\downarrow (\because x_2 - x_1 > 0)$
 $\Leftrightarrow a(x_2 + x_1) - a - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow a\{ax_1(1-x_1) + x_1\} - a - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow a^2x_1^2 - a(a+1)x_1 + a+1 = 0$
 $\left(D > 0 \text{ より } 3 < a \cdots \textcircled{2}, \textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ より } \boxed{\overset{\text{ヤ}}{3}} < a \leq 4 \right)$

$$\therefore x_1 = \frac{a + \boxed{\overset{\text{ヨ}}{1}} - \sqrt{\left(a + \boxed{\overset{\text{ユ}}{1}}\right)\left(a - \boxed{\overset{\text{コ}}{3}}\right)}}{2a} \quad \left(\text{注: 図より } x_1 < \frac{1}{2} \text{ なので} \right)$$

$$1050 = 819 \cdot 1 + 231$$

$$819 = 231 \cdot 3 + 126$$

$$231 = 126 \cdot 1 + 105$$

$$126 = 105 \cdot 1 + \boxed{21}$$

$$105 = \boxed{21} \cdot 5$$

よって、2 数 1050 と 819 の最大公約数は 21 (答)

(2)

c は a, b の公約数より、2 数 $a, b (a < b)$ は、

$$\begin{cases} a = a'c \\ b = b'c \end{cases} \quad (a', b' \text{ は自然数}) \text{ と表せる.}$$

ここで、 b を a で割ったときの商を $q (\geq 1)$ とし、余りが r だから、

$$b = a \cdot q + r$$

$$\Leftrightarrow b'c = a'c \cdot q + r$$

$$\Leftrightarrow (b' - a' \cdot q)c = r \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①より、 c は r の約数であることが示された(証明終)

(3)

$$\begin{cases} a = ma'' \\ b = mb'' \end{cases} \quad (a'' \text{ と } b'' \text{ は互いに素な自然数 } a < b \text{ より } a'' < b'')$$

$$m = sa + tb$$

$$\Leftrightarrow m = sma'' + tmb''$$

$$\Leftrightarrow sa'' + tb'' = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

互いに素な自然数 a'', b'' を用いて、 $sa'' + tb'' = 1$ をみたす整数 s, t が存在することを示せばよい。

$$0 \leq k \leq a'' - 1, \quad 0 \leq l \leq a'' - 1 \text{ をみたす自然数 } k, l \text{ を用いて}$$

$$\begin{cases} kb'' = a'' \cdot A + r(k) & (\text{自然数 } A \text{ は商, } r(k) \text{ は余り}) \\ lb'' = a'' \cdot B + r(l) & (\text{自然数 } B \text{ は商, } r(l) \text{ は余り}) \end{cases} \text{ と表せる.}$$

ここで、 $r(k) = r(l)$ とすると、

$$kb'' - a'' \cdot A = lb'' - a'' \cdot B$$

$$\Leftrightarrow (B - A) \cdot a'' = (l - k) \cdot b''$$

a'' と b'' は互いに素な整数だから、 $l - k$ は a'' の倍数とわかる。

ところが、

$$0 \leq k \leq a'' - 1, \quad 0 \leq l \leq a'' - 1 \text{ より、}$$

$$-(a'' - 1) \leq l - k \leq a'' - 1 \text{ となり、}$$

$$l - k = 0 \quad (l = k)$$

よって、「 $r(k) = r(l)$ 」 $\Rightarrow$ 「 $l = k$ 」がいえる。

また、対偶をとると、「 $r(k) \neq r(l)$ 」 $\Leftarrow$ 「 $l \neq k$ 」も成立することがわかる。

ここで、 a'' と b'' が互いに素な自然数 ($a'' < b''$) であることを用いて、

$$kb'' = a'' \cdot A + r(k) \quad (0 \leq k \leq a'' - 1)$$

$r(k)$ は全て異なる、 $r(k) = 0, 1, 2, \cdots, a'' - 1$ となり $0 \leq k \leq a'' - 1$ の

a'' 個の k の値に対して、全て $r(k)$ は異なるので、

$r(t) = 1 \quad (0 \leq t \leq a'' - 1)$ となる t が存在する。

このときの A に対して $s = -A$ とおけば、

$$tb'' = -sa'' + 1 \quad \leftarrow (r(t) = 1)$$

$$\Leftrightarrow sa'' + tb'' = 1$$

となり題意は示された (証明終)