

I

【解答】

(1)	(a)	－	1	2	4	5		
	(b)	カ	キ	ク	ケ			
		1	2	2	3			
	(c)	コ	サ	シ	ス			
－		1	2	2				
(2)	(a)	ア	イ	ウ	エ			
		1	2	1	3			
	(b)	オ	カ	キ	ク	ケ		
		9	1	4	2	7		
	(c)	コ	サ	シ	ス	セ		
		9	1	6	1	3		
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	3	2	7	3	－	9	－	1
	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	3	2	3	9	3	9	3	9

解説

(a)

$$f(a)=\frac{1}{2}$$
のとき、

【解説】

(1)(a)

$f(a)=\frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f(-a) &= \frac{e^{-a}-e^a}{e^{-a}+e^a} \\ &= -\left(\frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}\right) \\ &= -f(a) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\ &= 1-\frac{2}{e^{2x}+1} \end{aligned} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

より、

$$\begin{aligned} 1-\frac{2}{e^{2a}+1} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow e^{2a}+1 &= 4 \left(\because e^{2a}+1>0 \right) \\ \Leftrightarrow e^{2a} &= 3 \end{aligned}$$

であるから、

$$f(2a)=\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{e^{2a}+e^{-2a}}=\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$$

である。

(b)

$f(x)$ を x について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= 1-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= 1-\{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $f(b)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} f'(b) &= 1-\{f(b)\}^2 \\ &= 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(c)

$f(x)=t$ とおく。①より $e^{2x}+1>0$ となるので、 $t<1$ である。このとき

$$\begin{aligned} 3\{f(x)\}^2-5f(x)-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t^2-5t-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t+1)(t-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{1}{3} \left(\because t<1 \right) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 1-\frac{2}{e^{2x}+1} &= -\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow e^{2x}+1 &= \frac{3}{2} \left(\because e^{2x}+1>0 \right) \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\because e^x>0 \right) \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

である。

(2)(a)

「選んだコインがAである」という事象を A 、「選んだコインがBである」という事象を B 、「選んだコインを1回投げて表が出る」という事象を X_1 とおく。また、コインA, B, C が選ばれる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である。よって、選んだコインを1回投げて表が出たとき、選んだコインがAである確率 $P_{X_1}(A)$ は、

$$\begin{aligned} P_{X_1}(A) &= \frac{P(A\cap X_1)}{P(X_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。さらに、選んだコインを1回投げて表が出たとき、選んだコインがBである確率 $P_{X_1}(B)$ は、

$$\begin{aligned} P_{X_1}(B) &= \frac{P(B\cap X_1)}{P(X_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(b)

「選んだコインを2回投げ、2回とも表が出る」という事象を X_2 とおく。このとき、選んだコインを2回投げて2回とも表が出たとき、選んだコインがAである確率 $P_{X_2}(A)$ は、

$$\begin{aligned} P_{X_2}(A) &= \frac{P(A\cap X_2)}{P(X_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)} \\ &= \frac{9}{14} \end{aligned}$$

である。また、選んだコインを2回投げて2回とも表が出たとき、選んだコインがBである確率 $P_{X_2}(B)$ は、

$$\begin{aligned} P_{X_2}(B) &= \frac{P(B\cap X_2)}{P(X_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

である。

(c)

「選んだコインを3回投げ、表、表、裏の順で出る」という事象を X_3 とおく。このとき、選んだコインを3回投げて表、表、裏の順で出たとき、選んだコインがAである確率 $P_{X_3}(A)$ は、

$$\begin{aligned} P_{X_3}(A) &= \frac{P(A\cap X_3)}{P(X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

である。また、選んだコインを3回投げて表、表、裏の順で出たとき、選んだコインがBである確率 $P_{X_3}(B)$ は、

$$\begin{aligned} P_{X_3}(B) &= \frac{P(B\cap X_3)}{P(X_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(3)

$x=y-\frac{a}{y}$ (a は実数) を $x^3+9x+6=0$ に代入して、

$$\begin{aligned} \left(y-\frac{a}{y}\right)^3+9\left(y-\frac{a}{y}\right)+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(y^3-3ay+\frac{3a^2}{y}-\frac{a^3}{y^3}\right)+9\left(y-\frac{a}{y}\right)+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^3+(-3a+9)y+\frac{3a^2-9a}{y}-\frac{a^3}{y^3}+6 &= 0 \end{aligned} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①の y の係数が0であることが必要より、

$$\begin{aligned} -3a+9 &= 0 \\ \therefore a &= 3 \end{aligned}$$

である。このとき、 $a=3$ を①に代入して、

$$\begin{aligned} y^3++\frac{3\cdot 3^2-9\cdot 3}{y}-\frac{3^3}{y^3}+6 &= 0 \\ \therefore y^3-\frac{27}{y^3}+6 &= 0 \end{aligned}$$

となり、①について、 $\frac{1}{y}$ の係数も0であるので、十分である。これを解くと、

$$\begin{aligned} y^6+6y^3-27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y^3-3)(y^3+9) &= 0 \\ \Leftrightarrow y^3 &= 3, -9 \end{aligned}$$

となる。ここで、1の3乗根の1つを $\omega(\neq 1)$ とすると、

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega^2+\omega+1 &= 0 \left(\because \omega \neq 1 \right) \\ \Leftrightarrow \omega &= \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

となり、このうち問題文の形式に合致するのは $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である。この ω を用いると、 z についての方程式 $z^3=1$ の方程式の解は1, ω , ω^2 である。ゆえに、 $y^3=3\Rightarrow\left(\frac{y}{\sqrt[3]{3}}\right)^3=1$ の解は

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt[3]{3}} &= 1, \omega, \omega^2 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\omega, \sqrt[3]{3}\omega^2 \end{aligned}$$

である。以下、各 y の値における x の値を求める。

[1] $y=\sqrt[3]{3}$ のとき

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{3}-\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

となる。

[2] $y=\sqrt[3]{3}\omega$ のとき

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{3}\omega-\frac{3}{\sqrt[3]{3}\omega} = \sqrt[3]{3}\omega-\frac{3\omega^2}{\sqrt[3]{3}\omega^3} = \sqrt[3]{3}\omega-\sqrt[3]{9}\omega^2 \end{aligned}$$

となる。

[3] $y=\sqrt[3]{3}\omega^2$ のとき

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{3}\omega^2-\frac{3}{\sqrt[3]{3}\omega^2} = \sqrt[3]{3}\omega^2-\frac{3\omega}{\sqrt[3]{3}\omega^3} = \sqrt[3]{3}\omega^2-\sqrt[3]{9}\omega \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2] [3]より、 $y^3=3$ の解は $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{3}\omega-\sqrt[3]{9}\omega^2$, $\sqrt[3]{3}\omega^2-\sqrt[3]{9}\omega$ となる。同様に、

$$\begin{aligned} y^3=-9\Leftrightarrow\left(\frac{y}{\sqrt[3]{-9}}\right)^3=1 \text{ の解は} \\ \frac{y}{\sqrt[3]{-9}} &= 1, \omega, \omega^2 \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt[3]{-9}, \sqrt[3]{-9}\omega, \sqrt[3]{-9}\omega^2 \\ \Leftrightarrow y &= -\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{9}\omega, -\sqrt[3]{9}\omega^2 \end{aligned}$$

である。以下、各 y の値における x の値を求める。

[4] $y=-\sqrt[3]{9}$ のとき

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt[3]{9}-\frac{3}{-\sqrt[3]{9}} = -\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

となる。

[5] $y=-\sqrt[3]{9}\omega$ のとき

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt[3]{9}\omega-\frac{3}{-\sqrt[3]{9}\omega} = -\sqrt[3]{9}\omega+\frac{3\omega^2}{\sqrt[3]{9}\omega^3} = -\sqrt[3]{9}\omega+\sqrt[3]{3}\omega^2 \end{aligned}$$

となる。

[6] $y=-\sqrt[3]{9}\omega^2$ のとき

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt[3]{9}\omega^2-\frac{3}{-\sqrt[3]{9}\omega^2} = -\sqrt[3]{9}\omega^2+\frac{3\omega}{\sqrt[3]{9}\omega^3} = -\sqrt[3]{9}\omega^2+\sqrt[3]{3}\omega \end{aligned}$$

となる。

以上、[4], [5], [6]より、 $y^3=3$ の解は $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{3}\omega-\sqrt[3]{9}\omega^2$, $\sqrt[3]{3}\omega^2-\sqrt[3]{9}\omega$ となる。したがって、 $x^3+9x+6=0$ の解は ω を用いて

$$x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{3}\omega-\sqrt[3]{9}\omega^2, \sqrt[3]{3}\omega^2-\sqrt[3]{9}\omega$$

と表される。

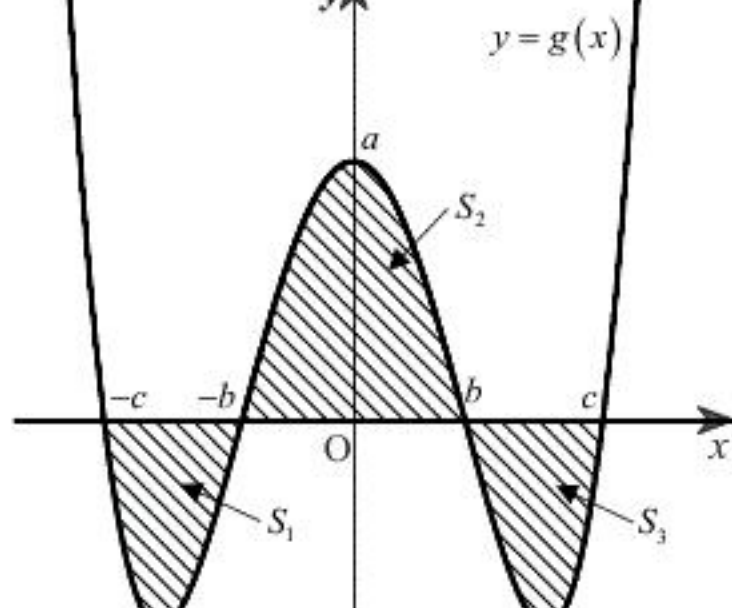
Ⅱ

【解答】

(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	5	6	5	0	9	5	1	5	5	3
(b)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	1	8	5	2	3	1	－	9	5	2	1
	ヌ	ネ									
(c)	ノ	ハ	ヒ								
	2	3	4								

【解説】

- (a) $g(x) = g(-x)$ が任意の実数 x で成り立つから、 $y = g(x)$ は偶関数である。よって、 $x_3 = b, x_4 = c$ のとき $x_1 = -c, x_2 = -b$ であり、 $-c < -b < b < c$ から $c > b > 0$ が得られる。ゆえに、 $y = g(x)$ は 4 次の係数が正の 4 次関数であり、 $y = g(x)$ と $y = 0$ が条件 A を満たすから、曲線 C と直線 l の上下関係および S_1, S_2, S_3 は下図の通りである。



また、 $S_1 + S_3 = S_2$ から直線 l の上側の面積と下側の面積の和が等しいので、

$$\int_{-c}^c g(x) dx = 0$$

となる。 $y = g(x)$ は偶関数より

$$\int_0^c g(x) dx = 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^c g(x) dx &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^3 + ax \right]_0^c \\ &= \frac{1}{5}c^5 - \frac{6}{5}c^3 + ac \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{5}c^5 - \frac{6}{5}c^3 + ac = 0$$

となる。このとき、 $c > 0$ であるから、 a について整理して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}c^5 - \frac{6}{5}c^3 + ac &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{1}{5}c^4 + \frac{6}{5}c^2 \quad (\because c > 0) \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、 $g(x) = 0$ の 4 解は小さい順に $-c, -b, b, c$ であるから、 $x^2 = X$ とおくと方程式

$X^2 - \frac{18}{5}X + a = 0$ の 2 解が b^2, c^2 である。よって、解と係数の関係より

$$b^2 + c^2 = \frac{18}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$b^2 c^2 = a \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。②を③に代入して、

$$\left(\frac{18}{5} - c^2 \right) c^2 = a$$

となるから、①より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}c^4 + \frac{6}{5}c^2 &= \left(\frac{18}{5} - c^2 \right) c^2 \\ \Leftrightarrow c^4 - 6c^2 &= 5c^4 - 18c^2 \\ \Leftrightarrow c^4 - 3c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow c^2 - 3 &= 0 \quad (\because c^2 > 0) \\ \Leftrightarrow c^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow c &= \sqrt{3} \quad (\because c > 0) \end{aligned}$$

となる。これを②、③に代入して、

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{18}{5} - 3} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad (\because b > 0) \\ a &= \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

である。

(b)

$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ より

$$\begin{aligned} h(x) &= (x+1)^4 - (6x^2 + 4x + 1) + \frac{12}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{5} \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{7}{5} \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + \frac{18}{5}(2x+1) - \frac{26}{5}x + \frac{7}{5} \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + 2x + 5 \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + 2(x+1) + 3 \end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $d = 1$ である。このとき、 $h_1(x) = (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2$ であり、

$y = h_1(x)$ は $y = g(x)$ を x 軸方向に -1 、 y 軸方向に $-\frac{9}{5}$ 平行移動したグラフである。 $y = g(x)$

に対して $y = 0$ が条件 A をみたすから、 $y = h_1(x)$ に対して条件 A をみたす直線は、平行移動

を考えると、 $y = -\frac{9}{5}$ である。ここで、求める直線の方程式を $y = mx + n$ (m, n は実数) とお

く。このとき、(1) の図で示した上下関係は、 C が条件 A を満たすような 4 次の係数が正の 4

次関数であれば常に成り立つ。よって、よって、(a) と同様に、直線 l の上側の面積と下側

の面積の和が等しいので、

$$\int_{x_1}^{x_4} \{h(x) - (mx + n)\} dx = 0$$

が成り立つ。同様に、

$$\int_{x_1}^{x_4} \left\{ h_1(x) - \left(-\frac{9}{5} \right) \right\} dx = 0$$

が成立するから、これを変形して

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_4} \left\{ h_1(x) - \left(-\frac{9}{5} \right) \right\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_4} \left\{ (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + \frac{9}{5} \right\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_4} \left\{ (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + 2(x+1) + 3 - 2(x+1) - 3 + \frac{9}{5} \right\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_4} \left\{ h(x) - \left(2x + \frac{16}{5} \right) \right\} dx &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $\int_{x_1}^{x_4} \{h(x) - (mx + n)\} dx = 0$ と比較することで、求める方程式は

$$y = 2x + \frac{16}{5}$$

となる。

(c)

$h_2(x) = x^4 - 3x^2 + p$ (p は実数) として、偶関数 $y = h_2(x)$ が直線 $y = 0$ に対して条件 A をみたす

とする。 $x_3 = q, x_4 = r$ ($r > q > 0$) とおくと、(a) と同様に考えることで、

$$\begin{aligned} \int_0^r h_2(x) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 + px \right]_0^r &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5}r^5 - r^3 + pr &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{1}{5}r^4 + r^2 \quad (\because r > 0) \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が得られる。また、 $h_2(x) = 0$ の 4 解は小さい順に $-r, -q, q, r$ であるから、 $x^2 = X$ とおくと

方程式 $X^2 - 3X + p = 0$ の 2 解が q^2, r^2 である。よって、解と係数の関係より

$$q^2 + r^2 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$q^2 r^2 = p \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

である。⑤を⑥に代入して、

$$(3 - r^2)r^2 = p$$

となるから、④より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}r^4 + r^2 &= (3 - r^2)r^2 \\ \Leftrightarrow r^4 - 5r^2 &= 5r^4 - 15r^2 \\ \Leftrightarrow 2r^4 - 5r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 - \frac{5}{2} &= 0 \quad (\because r^2 > 0) \\ \Leftrightarrow r^2 &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

となる。これを⑤、⑥に代入して、

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{3 - \frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because q > 0) \\ p &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。よって、(b) と同様に考えて、

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_4} \{h_2(x) - 0\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_4} \left(x^4 - 3x^2 + \frac{5}{4} \right) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_4} \left\{ x^4 - 3x^2 + 2x + 2 - 2x - 2 + \frac{5}{4} \right\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_4} \left\{ (x^4 - 3x^2 + 2x + 2) - \left(2x + \frac{3}{4} \right) \right\} dx &= 0 \end{aligned}$$

と変形できるから、 $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ に対して条件 A をみたす直線の方程式は

$$y = 2x + \frac{3}{4}$$

である。

Ⅲ

(1)

点 P が面 ABC 上にあるための必要十分条件は、

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC} \quad (p \geq 0, q \geq 0, p+q \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = p(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + q(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1-p-q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$$

である。 $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ であり、4 点 O, A, B, C は同一平面上にないから

$$\begin{cases} s = 1-p-q \\ t = p \\ u = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t+u = 1 \\ t = p \\ u = q \end{cases}$$

である。このとき、 $p \geq 0, q \geq 0, p+q \leq 1$ であるから

$$s \geq 0, t \geq 0, u \geq 0$$

である。よって、点 P が面 ABC 上にあるための必要十分条件は s, t, u を用いて

$$s+t+u=1, s \geq 0, t \geq 0, u \geq 0$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad s+t+u=1, s \geq 0, t \geq 0, u \geq 0$$

(2)

点 P は線分 OD 上にあるから、実数 $k(>0)$ を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= k\overrightarrow{OP} \\ &= k(s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \end{aligned}$$

と表される。ここで、点 D は面 ABC 上にあるから、(1)より

$$k(s+t+u)=1, ks \geq 0, kt \geq 0, ku \geq 0$$

である。 $k>0$ より、 $s \geq 0, t \geq 0, u \geq 0$ となるから、 $s+t+u=0 \Leftrightarrow s=t=u=0$ となるが、これは P が O と一致するため、四面体 OABC の内部に存在せず不適である。ゆえに、 $s+t+u \neq 0$

より、 $k = \frac{1}{s+t+u}$ となるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{s}{s+t+u}\vec{a} + \frac{t}{s+t+u}\vec{b} + \frac{u}{s+t+u}\vec{c}$$

である。 $OP:OD = 1:\frac{1}{s+t+u}$ となるから、

$$\begin{aligned} OD:PD &= \frac{1}{s+t+u} : \frac{1}{s+t+u} - 1 \\ &= 1:1-(s+t+u) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OD} = \frac{s}{s+t+u}\vec{a} + \frac{t}{s+t+u}\vec{b} + \frac{u}{s+t+u}\vec{c}, OD:PD = 1:1-(s+t+u)$$

(3)

点 P は線分 AE 上にあるから、実数 $l(>0)$ を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= l\overrightarrow{AP} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} &= l(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} &= (1-l+s)\vec{a} + lt\vec{b} + luc\vec{c} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表される。点 E は面 OBC 上にあるから

$$1-l+s=0 \Leftrightarrow (1-s)l=0$$

である。 $s=1$ のとき、 l の値に関わらず、点 E は面 OBC 上に存在しないから、 $s \neq 1$ である。

よって、 $l = \frac{1}{1-s}$ となるから、 $\textcircled{1}$ に代入して

$$\overrightarrow{OE} = \frac{t}{1-s}\vec{b} + \frac{u}{1-s}\vec{c}$$

である。したがって、 $AP:AE = 1:\frac{1}{1-s}$ より

$$AP:PE = 1:s$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{t}{1-s}\vec{b} + \frac{u}{1-s}\vec{c}, AP:PE = 1:s$$

(4)

内接球の半径を $r(>0)$ とおく。点 O, P から面 ABC に下ろした垂線の足をそれぞれ O', P' とおく。このとき、 $\triangle DOO'$ と $\triangle DPP'$ は相似であるから

$$\begin{aligned} OO':PP' &= OD:PD \\ \Leftrightarrow 20:r &= 1:1-(s+t+u) \\ \Leftrightarrow r &= 20-20(s+t+u) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。面 OBC, OCA, OAB について、同様にして

$$r = 15s \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$r = 12t \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$r = 20u \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。よって、 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より、

$$\begin{aligned} r &= 20-20\left(\frac{r}{15} + \frac{r}{12} + \frac{r}{20}\right) \\ \Leftrightarrow r &= 4 \end{aligned}$$

であるから、

$$(s, t, u) = \left(\frac{4}{15}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$$

である。ゆえに、求める $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$$