

【I】

【解答】

(1)	(a)	9	6	4	1	6	9	2	
		ク	ケ	コ	サ	シ	ス		
		9	6	4	9	3	2		
	(b)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	
		4	1	4	2	1	1	6	
		ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ		
		－	1	4	1	4	0		
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	
	2	1	2	1	4	6	0	－	
	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ		
	3	2	9	4	2	1	0		
(3)	(a)	ア	イ						
		1	0						
	(b)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	
		7	3	4	2	3	2	1	
		コ	サ	シ	ス	セ	ソ		
		4	3	8	4	3	7		

解説]

(a)

(y, u, v は実数とする。)

$z = \frac{3}{8} + yi$ を $w = z^2$ に代入することで、

(2) $\quad \$

【解説】

(1)(a)

(y, u, v は実数とする。)

$z = \frac{3}{8} + yi$ を $w = z^2$ に代入することで、

$$\begin{aligned}w &= \left(\frac{3}{8} + yi\right)^2 \\&= \left(\frac{9}{64} - y^2\right) + \frac{3}{4}yi\end{aligned}$$

となる。 $w = u + vi$ とおくと、実部・虚部を比較して

$$u = \frac{9}{64} - y^2 \qquad \cdots \text{①}$$

$$v = \frac{3}{4}y \qquad \cdots \text{②}$$

となる。したがって u を v で表すと、②より

$$y = \frac{4}{3}v$$

であるから、これを①へ代入して

$$u = \frac{9}{64} - \frac{16}{9}v^2 \qquad \cdots \text{③}$$

となる。 y が任意の実数をとるから、②より v も任意の実数を取る。したがって点 w は複素

平面上で実軸を軸とした放物線を描き、 $v = 0$ のとき $u = \frac{9}{64}$ よりこの放物線は実軸とは

点 $\frac{9}{64}$ で交わる。また、 $u = 0$ のとき

$$0 = \frac{9}{64} - \frac{16}{9}v^2$$

$$\Leftrightarrow v = \pm \frac{9}{32}$$

であるから、虚軸とは点 $\pm \frac{9}{32}i$ の2点で交わる。

(b)

(x, u, v は実数とする。)

$z = x + 2i$ を $w = \frac{1}{z}$ へ代入することにより、

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{x + 2i} \\&= \frac{x - 2i}{x^2 + 4}\end{aligned}$$

となる。 $w = u + vi$ より、実部・虚部を比較すると、

$$u = \frac{x}{x^2 + 4} \qquad \cdots \text{④}$$

$$v = -\frac{2}{x^2 + 4} \qquad \cdots \text{⑤}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}u^2 + v^2 &= \left(\frac{x}{x^2 + 4}\right)^2 + \left(-\frac{2}{x^2 + 4}\right)^2 \\&= \frac{1}{x^2 + 4} \qquad \cdots \text{⑥}\end{aligned}$$

となる。⑤より、

$$\frac{1}{x^2 + 4} = -\frac{v}{2}$$

であるから、これを⑥へ代入すると、

$$u^2 + v^2 = -\frac{v}{2}$$

$$\Leftrightarrow u^2 + \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

となる。よって点 w は点 $-\frac{1}{4}i$ を中心とする半径 $\frac{1}{4}$ の円上を動く。ここで x が任意の実数をと

るから、⑤より v の動く範囲は

$$-\frac{1}{2} \leq v < 0$$

である。したがって $v = 0$ となる点 $(u, v) = (0, 0)$ 、すなわち点 0 を除く。

(2)

(相似比は正の整数を用いて表されるものとする。)

$\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{AP}$ を成分表示して変形すると、

$$\begin{aligned}(x_2 + 1, y_2 + 1) &= \frac{1}{2}(x_1 + 1, y_1 + 1) \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 1 = \frac{1}{2}(x_1 + 1) \\ y_2 + 1 = \frac{1}{2}(y_1 + 1) \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 1 \\ y_1 = 2y_2 + 1 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。点 P が曲線 $\ell_1: y = x^3 - 3x$ 上を動くとき、

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1^3 - 3x_1 \\&\Leftrightarrow 2y_2 + 1 = (2x_2 + 1)^3 - 3(2x_2 + 1) \\&\Leftrightarrow y_2 = 4x_2^3 + 6x_2^2 - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となるから、点 Q は曲線 $\ell_2: y = 4x^3 + 6x^2 - \frac{3}{2}$ 上を動く。さて、点 B の座標を (s, t) とおく。点

$P(x_1, y_1)$ と曲線 ℓ_3 上の点 $R(x_3, y_3)$ について、曲線 ℓ_1 と曲線 ℓ_3 の相似比が $k:1$ ($k > 0$) のとき

$\overline{BR} = k\overline{BP}$ である。このとき

$$\begin{aligned}(x_3 - s, y_3 - t) &= k(x_1 - s, y_1 - t) \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{k}x_3 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)s \\ y_1 = \frac{1}{k}y_3 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)t \end{cases}\end{aligned}$$

となるから、点 P が曲線 ℓ_1 上を動くとき、

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1^3 - 3x_1 \\&\Leftrightarrow \frac{1}{k}y_3 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)t = \left\{\frac{1}{k}x_3 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)s\right\}^3 - 3\left\{\frac{1}{k}x_3 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)s\right\} \\&\Leftrightarrow y_3 = \frac{1}{k^2}x_3^3 + \frac{3}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)sx_3^2 + \left\{3\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2s^2 - 3\right\}x_3 + k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^3s^3 - 3k\left(1 - \frac{1}{k}\right)s - k\left(1 - \frac{1}{k}\right)t\end{aligned}$$

となる。よって、曲線 ℓ_1 と曲線 ℓ_3 が相似の位置にあるとき、与えられた曲線 ℓ_3 の式とこの式

の x の各次数の係数を比較することにより、

$$\begin{cases} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)s = \frac{3}{4} \\ k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^3s^3 - 3k\left(1 - \frac{1}{k}\right)s - k\left(1 - \frac{1}{k}\right)t = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

となる。これを解いて、 $k = 2, s = 1, t = 0$ となる。よって相似比は $2:1$ であり、相似の中心は

点 $B(1, 0)$ である。このとき曲線 ℓ_3 の x の1次の項の係数は

$$3\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2s^2 - 3 = -\frac{9}{4}$$

となる。

(3)(a)

$$S_n = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{5}{9} \left\{ 1 - (-1)^n \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

となるから、 n が奇数のとき $(-1)^n = -1$ より $S_n > \frac{5}{9}$ となる。したがって $S_n < \frac{1}{2}$ を満たすため

には n が偶数である必要がある。このとき

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{5}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\} < \frac{1}{2} \\&\Leftrightarrow \frac{1}{10} < \left(\frac{4}{5}\right)^n \\&\Leftrightarrow -1 < n \log_{10} \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore n < \frac{-1}{\log_{10} \frac{4}{5}} \left(\because \log_{10} \frac{4}{5} < 0 \right)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\log_{10} \frac{4}{5} &= \log_{10} \frac{8}{10} \\&= 3 \log_{10} 2 - 1\end{aligned}$$

であり、 $0.30095 \leq \log_{10} 2 < 0.30105$ であるから、

$$-0.09715 \leq \log_{10} \frac{4}{5} < -0.09685$$

$$\therefore 10 < \frac{-1}{\log_{10} \frac{4}{5}} < 11$$

となる。したがって $n \leq 10$ となる。これを満たす最大の偶数 n は 10 である。

(b)

$$\begin{aligned}a_1 &= \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\a_2 &= \left(\sin \frac{4}{3}\pi\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \\a_3 &= (\sin 2\pi)^3 = 0 \\a_4 &= \left(\sin \frac{8}{3}\pi\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{9}{16} \\a_5 &= \left(\sin \frac{10}{3}\pi\right)^5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = -\frac{9\sqrt{3}}{32} \\a_6 &= (\sin 4\pi)^6 = 0\end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^6 a_n = \frac{16\sqrt{3} + 24 + 18 - 9\sqrt{3}}{32} = \frac{7\sqrt{3} + 42}{32}$$

となる。また、自然数 N に対して n を 6 で割った商を非負整数 m 、余りを

k ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) とすると、

$$\begin{aligned}a_{6m+k} &= \left(\sin \left(\frac{2}{3}(6m+k)\pi\right)\right)^{6m+k} \\&= \left(\sin \frac{2}{3}k\pi\right)^{6m+k}\end{aligned}$$

である。それぞれの k の値に対して、

$$a_{6m+k} = \begin{cases} 0 & (k = 0, 3 \text{ のとき}) \\ \left(\frac{27}{64}\right)^m \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k & (k = 1, 4 \text{ のとき}) \\ \left(\frac{27}{64}\right)^m \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k & (k = 2, 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、 $a_{6m+k} = \left(\frac{27}{64}\right)^m a_k$ となる。したがって自然数 m に対して

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{6m} a_n &= \sum_{n=1}^6 a_n + \sum_{n=7}^{12} a_n + \cdots + \sum_{n=6m-5}^{6m} a_n \\&= \left\{ 1 + \frac{27}{64} + \cdots + \left(\frac{27}{64}\right)^{m-1} \right\} \sum_{n=1}^6 a_n \\&= \frac{1 - \left(\frac{27}{64}\right)^m}{1 - \frac{27}{64}} \cdot \frac{42 + 7\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

となる。また、十分大きな m に対して

$$\sum_{n=1}^N a_n = \begin{cases} \sum_{n=1}^{6m} a_n & (k = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{n=1}^{6m} a_n + \sum_{n=6m+1}^{6m+k} a_n & (k \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり、 $|a_n| < \left(\frac{27}{64}\right)^m$ であるから、

$$\sum_{n=1}^{6m} a_n - 4 \left(\frac{27}{64}\right)^m < \sum_{n=1}^N a_n < \sum_{n=1}^{6m} a_n + 4 \left(\frac{27}{64}\right)^m$$

となる。 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{64}\right)^m = 0$ より、この不等式の両辺は $N \rightarrow \infty$ つまり $m \rightarrow \infty$ とすると $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{6m} a_n$ へ

収束する。したがって、はさみうちの原理より

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{6m} a_n \\&= \frac{1}{1 - \frac{27}{64}} \cdot \frac{42 + 7\sqrt{3}}{32} \\&= \frac{84 + 14\sqrt{3}}{37}\end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

【解答】

(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	2	2	3	3	3	3	3	3	9
	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	3	3	1	3	3	4	2	3	
(b)	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ
	2	3	3	0	0	2	3	3	3
	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ
	-	1	1	2	3	3	1	1	3
	ヤ	ユ	ヨ						
	3	8	3						

【解説】

(a)

$$OA = \sqrt{3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 2$$

$$OB = \sqrt{3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 2$$

$$AB = \sqrt{0 + 1 + 3} = 2$$

より、△OABは1辺の長さが2の正三角形である。辺OA上の点Pの座標は、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA}$$

$$= k\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

と表せる。 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき点Pが平面 $z=t$ と辺OAとの交点となるとすると、 $\frac{\sqrt{3}}{2}k=t$ で

あるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{\sqrt{3}}t\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2t, \frac{\sqrt{3}}{3}t, t\right)$$

より、平面 $z=t$ と辺OAの交点は点 $\left(2t, \frac{\sqrt{3}}{3}t, t\right)$ となる。また、辺AB上の点Qの座標は実数

s を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BA}$$

$$= \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + s(0, 1, \sqrt{3})$$

$$= \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + s, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}s\right)$$

と表せる。 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき点Qが平面 $z=t$ と線分ABとの交点となるとすると、

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}s = t \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{3}}$$

であるから、

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)(0, 1, \sqrt{3}) = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}t, t\right)$$

より、平面 $z=t$ と辺ABの交点は点 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}t, t\right)$ となる。 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ として、立体Vの

平面 $z=t$ による切り口を考えると、 $t \geq 0$ のとき z 軸から平面 $z=t$ と辺OAとの交点までの

距離は

$$\sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{3}\sqrt{t^2} = \frac{\sqrt{39}}{3}|t|$$

である。また z 軸から平面 $z=t$ と辺ABとの交点までの距離は

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{3}t^2}$$

である。したがって切り口は半径 $\frac{\sqrt{39}}{3}|t|$ と $\sqrt{3 + \frac{1}{3}t^2}$ の同心円で囲まれた部分となり、切り口

の面積は

$$\left(3 + \frac{1}{3}t^2\right)\pi - \frac{13}{3}t^2\pi = (3 - 4t^2)\pi$$

となる。したがって立体Vの体積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (3 - 4t^2)\pi dt = -4\pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dt$$

$$= -4\pi \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$$

$$= 2\sqrt{3}\pi$$

となる。

(b)

円Cとの中心をGとすれば、△OABは正三角形であるからGは△OABの重心でもある。し

たがって

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$$

より、円の中心は点 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$ である。半径はこの中心から点Oまでの距離を計算して、

$$\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。一方3点O, A, Bが作る平面は、平面の式を

$$ax + by + cz + d = 0$$

とおくと、この平面は3点O, A, Bを通るから

$$\begin{cases} d = 0 \\ \sqrt{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c + d = 0 \\ \sqrt{3}a - \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c + d = 0 \end{cases}$$

を解いて $a=d=0, b=-\sqrt{3}c$ となる。したがって平面の式は

$$z = \sqrt{3}y$$

である。この円Cと平面 $z=t$ は、円Cが平面 $z=\sqrt{3}y$ 上にあるから、直線

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}t, z = t$$

上で交わる。交点の x 座標を x とすると、中心からの距離が $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ であるから、

$$\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2 + t^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}t^2$$

とならなければならない。 x についてこれが実数解を持つには、右辺が0以上でなければならない。したがって、

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{3}t^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$$

のとき交点を持つ。このとき x 座標は

$$x - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \pm \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}t^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 - t^2}\right)$$

となる。したがって円Cと平面 $z=t$ の交点の座標は、

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 - t^2}\right), \frac{\sqrt{3}}{3}t, t\right)$$

である。円Cとその内部からなる円板を z 軸の周りに1回転して得られる立体の平面 $z=t$ に

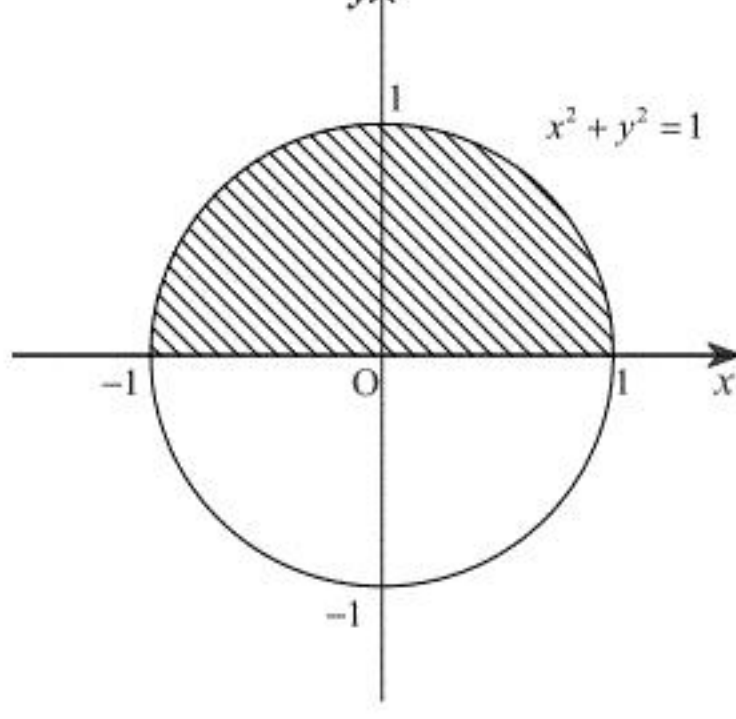
よる切り口の面積は、この交点をつないだ線分の z 軸から最も近い点と遠い点を考えて

$$\pi \left[\left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(1 + \sqrt{1 - t^2}\right) \right\}^2 - \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(1 - \sqrt{1 - t^2}\right) \right\}^2 \right] = \frac{16}{3}\pi \sqrt{1 - t^2}$$

となる。よって求める体積は

$$\int_{-1}^1 \frac{16}{3}\pi \sqrt{1 - t^2} dt$$

である。ここで $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ は下図の斜線部の面積である。



したがって、

$$\int_{-1}^1 \frac{16}{3}\pi \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{16}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi$$

$$= \frac{8}{3}\pi^2$$

となる。

III

(1)

$$A = (s^2 + ts + 2t^2)B + 2t^3$$

より、商は $s^2 + ts + 2t^2$ 、余りは $2t^3$ である。

(答) 商: $s^2 + ts + 2t^2$, 余り: $2t^3$

(2)

数学的帰納法により、任意の 0 以上の整数 n に対して、いかなる s の n 次式 $P(s, t)$ も s, t の整式 $Q(s, t)$ と t の整式 $R(t)$ を用いて

$$\begin{aligned} P(s, t) &= f_n(t)s^n + \cdots f_0(t) \\ &= Q(s, t)(s-t) + R(t) \end{aligned}$$

と表せることを示す。

[1] $n=0$ のとき

$$P(s, t) = f_0(t)$$

より、 $Q(s, t) = 0, R(t) = f_0(t)$ とすればよい。

[2] $n=k$ のとき

k 次の整式 $P_k(s, t)$ は s, t の整式 $Q_k(s, t)$ と t の整式 $R_k(t)$ を用いて

$$P_k(s, t) = Q_k(s, t)(s-t) + R_k(t)$$

とおけるとする。次に $n=k+1$ のときを考えると、 $(k+1)$ 次の整式 $P_{k+1}(s, t)$ に対して

$$P_{k+1}(s, t) = f_{k+1}(t)s^{k+1} + \cdots + f_0(t) = \{f_{k+1}(t)s^k + \cdots + f_1(t)\}s + f_0(t)$$

と表せる。 $f_{k+1}(t)s^k + \cdots + f_1(t)$ は s の k 次の整式であるから、

$$f_{k+1}(t)s^k + \cdots + f_1(t) = Q_k(s, t)(s-t) + R_k(t)$$

とでき

$$\begin{aligned} f_{k+1}(t)s^{k+1} + \cdots + f_0(t) &= \{f_{k+1}(t)s^k + \cdots + f_1(t)\}s + f_0(t) \\ &= \{Q_k(s, t)(s-t) + R_k(t)\}s + f_0(t) \\ &= \{Q_k(s, t)(s-t) + R_k(t)\}\{(s-t) + t\} + f_0(t) \\ &= \{Q_k(s, t)s + R_k(t)\}(s-t) + R_k(t)t + f_0(t) \end{aligned}$$

となるから、 $Q_{k+1}(s, t) = Q_k(s, t)s + R_k(t), R_{k+1}(t) = R_k(t)t + f_0(t)$ とすれば $n=k+1$ のときも表せる。

以上, [1], [2] より、題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$P(s, t) = Q(s, t)(s-t) + R(t)$$

となる整式 $Q(s, t), R(t)$ が存在する。よって $P(x, y) = -P(y, x)$ であるとき、

$$Q(x, y)(x-y) + R(y) = -Q(y, x)(y-x) - R(x)$$

となる。これを变形すると、

$$R(x) + R(y) = \{Q(y, x) - Q(x, y)\}(x-y)$$

となる。ここで $y=x$ とすると、

$$2R(x) = 0$$

$$\therefore R(x) = 0$$

となるから、 $R(t) = 0$ となる。したがって

$$P(s, t) = Q(s, t)(s-t)$$

となり、 $(s-t)$ が $P(s, t)$ の因数であることが示された。

(証明終)

(4)

$$P(s, t) = (s-t)^2 = s^2 - 2st + t^2$$

とすると、 $(s-t)$ は $P(s, t)$ の因数であるが、

$$P(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$P(y, x) = y^2 - 2xy + x^2$$

より、 $P(x, y) \neq -P(y, x)$ となる。よって 1 次式 $(s-t)$ が整式 $P(s, t)$ の因数であることは

$P(x, y) = -P(y, x)$ であることの十分条件ではない。

(証明終)