

I

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
		1	4	1	2	2	1	8	1	4	2	
	(b)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	
		3	2	6	2	1	3	1	5	1	6	
		ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	
1	1	3	3	1	3	1	5	1	6			
(2)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ				
		6	2	5	1	2	9	6				
	(b)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ				
		6	7	1	1	2	9	6				
	(c)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト					
		1	1	1	2	9	6					
	(d)	ナ	ニ	ヌ								
		2	2	7								
(3)	(a)	ア										
		3										
	(b)	イ	ウ									
		1	2									
	(c)	エ	オ									
		9	8									

【解説】

(1)(a)

$$\begin{aligned}
 A+B &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx \\
 &= [x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{4} \\
 A-B &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= [\log(\sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

である。2式を連立して解いて、

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{8} \pi + \frac{1}{4} \log 2 \\
 B &= \frac{1}{8} \pi - \frac{1}{4} \log 2
 \end{aligned}$$

を得る。

(b)

$$\begin{aligned}
 3C+2D &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 13}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\
 &= [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} \\
 2C-3D &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 3 \cos x + 13)'}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx \\
 &= [\log(2 \sin x + 3 \cos x + 13)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \log \frac{15}{16}
 \end{aligned}$$

である。2式を連立して解いて、

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{3}{26} \pi + \frac{2}{13} \log \frac{15}{16} \\
 D &= \frac{1}{13} \pi - \frac{3}{13} \log \frac{15}{16}
 \end{aligned}$$

を得る。

(2)(a)

同じ目が続けて出ないのは、1回前に出た目と異なる目が続けて出るときであるため、求める確率は

$$\frac{6}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

である。

(b)

同じ目が2回以上続けて出る事象は、同じ目が続けて出ない事象の余事象であるため、求める確率は

$$1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

である。

(c)

同じ目が4回以上続けて出るのは、1回目から4回目に同じ目が出る、または2回目から5回目に同じ目が出る、または1回目から5回目に同じ目が出る場合のうちいずれかの場合であるため、求める確率は

$$\frac{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{11}{1296}$$

である。

(d)

同じ目が3回続けて出るのは、1回目から3回目に同じ目が出る、または2回目から4回目に同じ目が出る、または3回目から5回目に同じ目が出るいずれかの場合であるため、その確率は

$$\frac{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{6} + \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{85}{1296}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{85}{1296} + \frac{11}{1296} = \frac{2}{27}$$

である。

(3)(a)

$b \neq c$ のとき、

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=0}^n b^{n-k} c^k \\
 &= \sum_{k=0}^n b^n \left(\frac{c}{b}\right)^k \\
 &= b^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{c}{b}} \\
 &= \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b - c}
 \end{aligned}$$

である。したがって、 $b=3, c=-2$ のとき、

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{3^6 - (-2)^6}{5} \\
 &= 133
 \end{aligned}$$

となるため、 a_5 を5で割った余りは3である。

(b)

$b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{6}{5} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}
 \end{aligned}$$

である。 $\left|\frac{1}{2}\right| < 1, \left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ より、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{6}{5} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1 + \frac{1}{3}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

である。

(c)

$x \neq 1$ を満たす実数 x に対して、 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k$ と定義する。

$$S_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$xS_n(x) = x^2 + 2x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となるため、①、②の辺々を差し引くと、

$$\begin{aligned}
 (1-x)S_n(x) &= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - nx^{n+1} \\
 &= \sum_{k=1}^n x^k - nx^{n+1} \\
 &= \frac{x(1-x^n)}{1-x} - nx^{n+1} \\
 \therefore S_n(x) &= \frac{x-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}
 \end{aligned}$$

となる。 $|x| < 1$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} na_n &= \frac{6}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{5} S_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} S_n\left(-\frac{1}{3}\right) \right\} \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{-\frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{9}{8}
 \end{aligned}$$

である。

【解答】

(a)	ア	イ	ウ	エ	オ							
	3	4	4	7	4							
(b)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ		
	7	4	3	7	3	4	3	7	7	6		
	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ						
	1	7	6	7	7	6						
(c)	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム
	1	7	3	7	7	3	4	7	0	4	7	2

【解説】

- (a)
- $$\angle B = \angle D = 90^\circ \text{ より,}$$
- $$CE = \sqrt{CD^2 + DE^2}$$
- $$= \sqrt{2}$$
- $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
- $$= \sqrt{2}$$
- である。したがって、 $0^\circ < \angle ACE < 180^\circ$ より、
- $$\cos \angle ACE = \frac{AC^2 + CE^2 - AE^2}{2 \cdot AC \cdot CE}$$
- $$= \frac{3}{4}$$
- $$\sin \angle ACE = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACE}$$
- $$= \frac{\sqrt{7}}{4}$$
- である。ゆえに、五角形 ABCDE の面積を S とおくと、
- $$S = \triangle ACE + \triangle ABC + \triangle CDE$$
- $$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE \cdot \sin \angle ACE + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$
- $$= \frac{4 + \sqrt{7}}{4}$$
- となる。
- (b)
- $$\angle B = 90^\circ, AB = BC = 1 \text{ より, } \angle ACB = 45^\circ \text{ である。同様に, } \angle DCE = 45^\circ \text{ である。したがって,}$$
- $$\cos \angle BCD = \cos (\angle ACE + 90^\circ)$$
- $$= -\sin \angle ACE$$
- $$= -\frac{\sqrt{7}}{4}$$
- となるため、
- $$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \angle BCD$$
- $$= -\frac{\sqrt{7}}{4}$$
- である。また、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{BA}$ は
- $$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$
- $$= (s-1)\vec{p} + t\vec{q}$$
- と表せるため、
- $$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$$
- $$\Leftrightarrow (s-1)|\vec{p}|^2 + t\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$$
- $$\Leftrightarrow s-1 = \frac{\sqrt{7}}{4}t \quad \dots \textcircled{1}$$
- となる。また、
- $$|\overrightarrow{BA}| = 1$$
- $$\Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}|^2 = 1$$
- $$\Leftrightarrow (s-1)^2 |\vec{p}|^2 + t^2 |\vec{q}|^2 + 2t(s-1)\vec{p} \cdot \vec{q} = 1$$
- $$\Leftrightarrow (s-1)^2 + t^2 - \frac{\sqrt{7}t(s-1)}{2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$
- である。①を②に代入して、
- $$\frac{7}{16}t^2 + t^2 - \frac{7}{8}t^2 = 1$$
- $$\Leftrightarrow \frac{9}{16}t^2 = 1$$
- $$\therefore t = \pm \frac{4}{3}$$
- となる。①より、
- $$s = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{3}, t = \pm \frac{4}{3} \text{ (複合同順)}$$
- である。ここで、
- $$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} > 0$$
- $$\Leftrightarrow (s-1)\vec{p} \cdot \vec{q} + t|\vec{q}|^2 > 0$$
- $$\Leftrightarrow t > \frac{\sqrt{7}}{4}(s-1)$$
- となるから、これを満たす s, t の値は、
- $$s = \frac{3 + \sqrt{7}}{3}, t = \frac{4}{3}$$
- である。対称性より、
- $$\overrightarrow{CE} = s\vec{q} + t\vec{p}$$
- であるため、辺 AE の中点を M とすると、
- $$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}}{2}$$
- $$= \frac{s+t}{2}(\vec{p} + \vec{q})$$
- $$= \frac{7 + \sqrt{7}}{6}(\vec{p} + \vec{q})$$
- となり、
- $$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}$$
- $$= -\frac{1 + \sqrt{7}}{6}\vec{p} - \frac{7 + \sqrt{7}}{6}\vec{q}$$
- となる。
- c)
- $$\triangle MAB \equiv \triangle M'E'B \text{ より } \angle MBA = \angle M'BE' \text{ が成立する。A, B, E' が一直線上にあり, } MB = M'B$$
- から B は MM' の中点である。したがって、
- $$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MB}$$
- $$= -\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\vec{p} - \frac{7 + \sqrt{7}}{3}\vec{q}$$
- である。よって、
- $$|\overrightarrow{MM'}|^2 = \left(-\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 |\vec{p}|^2 + \left(-\frac{7 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 |\vec{q}|^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7 + \sqrt{7}}{3}\right) \cdot \vec{p} \cdot \vec{q}$$
- $$= 4 + \sqrt{7}$$
- である。また、対称性より
- $$\overrightarrow{MM''} = -\frac{7 + \sqrt{7}}{3}\vec{p} - \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\vec{q}$$
- となるため、
- $$\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MM''} = \left(-\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7 + \sqrt{7}}{3}\right) \cdot (|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2) + \left\{ \left(-\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7 + \sqrt{7}}{3}\right)^2 \right\} \vec{p} \cdot \vec{q}$$
- $$= 0$$
- である。ゆえに、 $\angle M'MM'' = 90^\circ$ である。また、対称性より $|\overrightarrow{MM'}| = |\overrightarrow{MM''}|$ である。したがって、 $\triangle MM'M''$ の面積は
- $$\triangle MM'M'' = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MM'}| |\overrightarrow{MM''}|$$
- $$= \frac{|\overrightarrow{MM'}|^2}{2}$$
- $$= \frac{4 + \sqrt{7}}{2}$$
- である。

Ⅲ

(1)

$y=f(x)$ とおくと、定義域は $x \geq -1$ であり、値域は $y \geq 0$ である。 $x \geq -1$ のもとで、

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow y^2 &= x+1 \\ \Leftrightarrow y^2 - 1 &= x \end{aligned}$$

である。したがって、

$$f^{-1}(x) = x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} a_2 &= f^{-1}(2) = 3 \\ a_3 &= f^{-1}(3) = 8 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_2 = 3, a_3 = 8$

(2)

$f(x) = \sqrt{x+1}$ のとき、 $a_n = n^2 - 1$ である。したがって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k) \\ &= \frac{1}{3}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1) \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ のときも上式は成り立つ。したがって、任意の正の整数 n に対して、

$$S_n = \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)$$

である。

(答) $S_n = \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)$

(3)

$y=f(x)$ とおくと、定義域は実数全体、値域は $y > 0$ である。

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ \Leftrightarrow x &= \log y \quad (y > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$f^{-1}(x) = \log x \quad (x > 0)$$

であるため、 $a_n = \log n$ である。 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{k \log(k+1) - k \log k\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{(k+1) \log(k+1) - k \log k - \log(k+1)\} \\ &= n \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) \\ &= n \log n - \log(n!) \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ のときも上式は成り立つ。したがって、任意の正の整数 n に対して、

$$S_n = n \log n - \log(n!)$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

$f(x) = e^x$ のとき、 $n-1 \geq S_n$ が成り立つことを示す。 $k \geq 1$ のとき、 $k(a_{k+1} - a_k) = k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

である。

$$g(x) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (x \geq 1)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\ g''(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

である。 $g''(x) < 0$ より、 $g'(x)$ は単調減少し、

$$g'(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$$

である。したがって、 $g(x)$ は単調増加し、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ &= \log e \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} g(k) &\leq 1 \\ \therefore k(a_{k+1} - a_k) &\leq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= n-1 \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ のときも上式は成り立つ。したがって、任意の正の整数 n で

$$S_n \leq n-1$$

が成り立つ。ゆえに、

$$\begin{aligned} S_n &\leq n-1 \\ \Leftrightarrow n \log n - \log(n!) &\leq n-1 \\ \Leftrightarrow \log(n!) &\geq n \log n + 1 - n \\ \Leftrightarrow n! &\geq e^{n \log n + 1 - n} \\ \Leftrightarrow n! &\geq n^n e^{1-n} \end{aligned}$$

となるため、任意の正の整数に対して $n! \geq n^n e^{1-n}$ が成り立つ。

(証明終)