

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ									
	6	1	6	1	0									
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	1	3	2	3	2	3	9	1	2	3	3	1	1	
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	—	1	4	2	5	6	—	7	6	8	1	5	2	
	セ	ソ	タ	チ	ツ									
	5	2	2	2	5									
(4)	ア	イ	ウ	エ										
	(C)	(B)	(C)	(A)										

Ⅱ

【解答】

(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	2	1	4	－	1	2	3	2	9	－	4
(b)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト		
	3	－	1	8	3	3	－	1	2		
(c)	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	
	－	1	8	3	8	4	5	8	1	8	

Ⅲ

(1)

I_0 は,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= \left[-\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (-\log 1) \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $I_0 = \frac{1}{2} \log 2$

(2)

数学的帰納法を利用して、 $n \geq 1$ のとき、

$$I_n = (-1)^n \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{2m} \right\}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$I_1 = -1 \left(I_0 + \frac{-1}{2} \right), \text{ すなわち } I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立することを示す。

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (\tan^2 x + 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \end{aligned}$$

であり、 $\cos x = t$ とおくと、 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ であり、積分区間の対応は以下のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって、

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{-1}{t^3} dt \\ &= \left[\frac{1}{2t^2} \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と計算できて、 $\textcircled{1}$ が成立することが示された。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

$$I_k = (-1)^k \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{2m} \right\}$$

が成立することを仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+3} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1} x \cdot \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1} x \cdot (\tan x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1} x dx \\ &= \left[\frac{\tan^{2k+2} x}{2k+2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_k \\ &= \frac{1}{2k+2} - I_k \end{aligned}$$

と計算できる。ここで仮定より、

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{1}{2k+2} - (-1)^k \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{2m} \right\} \\ &= (-1)^{k+1} \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^{k+1} \frac{(-1)^m}{2m} \right\} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも、与式は成立する。

以上、[1], [2] より、 $n \geq 1$ のとき、 $I_n = (-1)^n \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{2m} \right\}$ が成立する。

(証明終)

(3)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 $0 \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi} x$ が成立するので、

$$0 \leq I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi} x \right)^{2n+1} dx \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。右辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2n+1} x^{2n+1} dx &= \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2n+1} \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2n+1} \frac{\left(\frac{\pi}{4} \right)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= \frac{\pi}{2n+2} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi} x \right)^{2n+1} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4(2n+2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{2}$ において、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

が得られる。(2) より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \left\{ I_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{2m} \right\} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| I_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{2m} \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、これより、

$$\begin{aligned} I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m} &= 0 \\ \frac{1}{2} \log 2 &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m} \\ \therefore \log 2 &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \end{aligned}$$

が得られ、与式が成立することが示された。

(証明終)