

問 題 紙

教 科	科 目	ページ数
数 学	数学Ⅰ・数学A 数学Ⅱ・数学B 数学Ⅲ	2

解答の書き方

1. 問題〔1〕,〔2〕,〔3〕は全問解答すること。問題〔4〕,〔5〕はこのうちから、1題を選択し、選択した問題の番号を解答用紙の〔 〕内に記入してから、解答すること。
2. 解答は、すべて別紙の解答用紙の所定の欄に、はっきりと記入すること。
3. 解答を訂正する場合には、きれいに消してから記入すること。
4. 解答用紙には、解答と志望学部及び受験番号のほかは、いっさい記入しないこと。

注 意

1. 監督員の「始め」という指示があるまで、問題紙を開かないこと。
2. 「始め」の指示と同時に、解答用紙に志望学部及び受験番号を必ず書くこと。
3. 下書き用紙は、片面だけ使用すること。
4. 問題の内容についての質問には、いっさい応じないが、その他の用事があるときは、だまって手をあげて、監督員の指示を受けること。
5. 試験終了時には、解答用紙を必ずページ順に重ね、机の右側に置くこと。
6. 試験終了後、問題紙及び下書き用紙は持ち帰ること。

〔1〕 一辺の長さが a の正方形 $ABCD$ を底面とする四角すい $O - ABCD$ がある。

$OA = OB = OC = OD = a$ のとき、次の問に答えよ。

1. この四角すいの高さを a で表せ。
2. 点 P を辺 AO 上に、点 Q を辺 AB 上に $AP = BQ$ となるようにとる。
 $AP = BQ = x$ とおくとき、三角すい $PAQD$ の体積を最大にする x を a で表せ。
3. $\theta = \angle QPD$ とおく。 x が 2. で求めた値のとき、 $\cos \theta$ の値と $\triangle QPD$ の面積を求めよ。

〔2〕 A をいくつかの実数からなる集合とすると、集合 $C_1(A)$ を

$$C_1(A) = \left\{ \frac{a+b}{2} \mid a \in A, b \in A \right\}$$

と定める。さらに、集合 $C_2(A), \dots, C_n(A)$ を

$$C_2(A) = \left\{ \frac{a+b}{2} \mid a \in C_1(A), b \in C_1(A) \right\}$$

$\vdots$

$$C_n(A) = \left\{ \frac{a+b}{2} \mid a \in C_{n-1}(A), b \in C_{n-1}(A) \right\}$$

と順に定める。例えば、 $A = \left\{ 0, \frac{1}{4}, 1 \right\}$ のとき、

$$\begin{aligned} C_1(A) &= \left\{ 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{8}{8} \right\} \end{aligned}$$

となる。

1. $A = \left\{ 0, \frac{1}{4}, 1 \right\}$ のとき、 $C_2(A)$ を求めよ。
2. $A = \{0, 1\}$ のとき、 $C_n(A)$ の要素の個数を求めよ。
3. $A = \left\{ 0, \frac{1}{3}, 1 \right\}$ のとき、

$$C_n(A) = \left\{ 0, \frac{1}{3 \cdot 2^n}, \frac{2}{3 \cdot 2^n}, \frac{3}{3 \cdot 2^n}, \dots, \frac{3 \cdot 2^n - 2}{3 \cdot 2^n}, 1 \right\}$$

となることを数学的帰納法で証明せよ。

〔3〕 複素数 $\alpha = \frac{1}{\cos \theta} + i \tan \theta$ ($-90^\circ < \theta < 90^\circ$) に対して、次の問に答えよ。

1. α の偏角を φ とするとき、 $\tan \varphi$ の範囲を求めよ。
2. α の絶対値 $|\alpha|$ の最小値を求めよ。
3. $|\alpha| = \sqrt{2}$ のとき、原点 O , α , $\bar{\alpha}$ の3点を頂点とする三角形は正三角形であることを示せ。ただし、 $\bar{\alpha}$ は α に共役な複素数である。

〔4〕 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$ について、次の問に答えよ。

1. 曲線 $C: y = f(x)$ 上の2点 $P(\alpha, f(\alpha))$, $Q(\beta, f(\beta))$ ($\alpha \neq \beta$) における曲線 C の接線が平行であるとき、線分 PQ の中点 M は α , β によらない定点であることを示せ。
2. 点 M は曲線 C 上の点であることを示せ。
3. 点 M における C の接線を $y = sx + t$ とするとき、

$$f(x) - (sx + t) = (x + a)^3$$

を示せ。

〔5〕 次の問に答えよ。

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$ を求めよ。
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x \, dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

3. $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくとき、
$$a_n = n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)a_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を示せ。

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^6 \sin x \, dx$ を求めよ。
5. 正の偶数 n に対して、
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx = k_{n-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} + k_{n-2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2} + \dots + k_1 \left(\frac{\pi}{2}\right) + k_0$$

(ただし、 $k_0, \dots, k_{n-1}$ は整数)

と表したとき、 k_0, k_1 を求めよ。