

[1] 四角形 ABCD において, $AB = 5$, $BC = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$ とする。 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ とおくとき, 次の問に答えよ。

1. 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ。

2. $\overrightarrow{BD} = s\vec{a} + t\vec{c}$ (s, t は実数) とおくとき

(1) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ をそれぞれ $s, t, \vec{a}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$ をそれぞれ s, t を用いて表せ。

3. $\angle BCD = \angle DAB = 90^\circ$ のとき, 辺 AD, CD の長さおよび $\triangle ACD$ の面積を求めよ。

〔 2 〕 p を正の定数とする。数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = pa_n + \frac{1}{p^n} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたしているとする。このとき、次の問に答えよ。

1. a_2, a_3, a_4 を p を用いて表せ。
2. a_n を p と n を用いて表せ。

〔 3 〕 曲線 $C : y = x^3 - x$ と直線 $\ell : y = (k^2 + k)(x + 1)$ について次の問に答えよ。ただし、 $-\frac{1}{2} < k < 1$ とする。

1. 曲線 C と直線 ℓ の交点を x 座標の小さい順に P, Q, R として、各点の座標を求めよ。
2. 点 Q, R における曲線 C のそれぞれの接線の交点の x 座標が正であることを示せ。

〔 4 〕 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ \log x & (1 \leq x) \end{cases}$$

と定める。曲線 $y = f(x)$ を y 軸のまわりに回転して容器をつくる。この容器に単位時間あたり a の割合で水を静かに注ぐ。水を注ぎはじめてから時間 t だけ経過したときに、水面の高さが h 、水面の半径が r 、水面の面積が S 、水の体積が V になったとする。

このとき、次の問に答えよ。

1. V を h を用いて表せ。

2. h , r , S の時間 t に関する変化率 $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dS}{dt}$ をそれぞれ a , h を用いて表せ。