

〔 1 〕 座標平面上に点 $A(0, -3)$ 、点 $B(3, 0)$ がある。点 P が直線 $y = ax$ 上を動くとき、次の問に答えよ。ただし、 a は実数である。

1. 点 P の座標を (t, at) とするとき、 $AP^2 + BP^2$ を t と a を用いて表せ。
2. $AP^2 + BP^2$ の最小値と、そのときの t の値を、それぞれ a を用いて表せ。
3. a が変化するとき、 $AP^2 + BP^2$ の最小値と、そのときの a の値を求めよ。

〔 2 〕 n が自然数のとき, 2 次方程式

$$x^2 - (4n - 7)x + 3n^2 - 5n - 8 = 0$$

について次の問に答えよ。

1. この 2 次方程式が重解をもたないことを示せ。
2. この 2 次方程式の 2 つの解のうち, 小さい方を a_n , 大きい方を b_n とするとき, a_1, b_1, a_5, b_5 をそれぞれ求めよ。
3. $\sum_{n=1}^{20} a_n, \sum_{n=1}^{20} b_n$ をそれぞれ求めよ。

〔 3 〕 次の問に答えよ。

1. 実数 x, y, z が $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ をみたすならば, $x+y$, $y+z$, $z+x$ のうち少なくとも 1 つは 0 であることを示せ。
2. $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, $2 < b < 4$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < c < 1$ のとき, 次の 2 つの数 A, B の大小を比較せよ。

$$A = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_2 b} + \frac{1}{\log_2 c}$$

$$B = \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c}$$

- 〔 4 〕 図に示すように、原点 O を中心とする半径 5 の円 C と、円 C に内接する半径 1 の円 C' があり、円 C' は円 C に内接しながら、すべることなく転がって移動するものとする。円 C' の中心が $(4, 0)$ にあるとき、円 C' の周上の点 A が円 C と円 C' との接点にあるとする。この位置から円 C' が転がり、その中心と原点とを結ぶ直線が x 軸と角 θ をなしたとき、点 A は A' の位置に来たとする。このときの円 C と円 C' の接点を点 P 、円 C' の中心の位置を点 Q とする。

次の問に答えよ。

1. $\varphi = \angle A'QP$ とし、 φ を θ を用いて表せ。
2. 点 Q および点 A' の座標を θ を用いて表せ。
3. 点 A' の座標を (x, y) とするとき、ベクトル $\vec{v} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta} \right)$ を求めよ。
4. ベクトル $\vec{v}$ とベクトル $\overrightarrow{PA'}$ は直交することを示せ。
5. 移動開始後にベクトル $\vec{v}$ がはじめて y 軸に平行になるときの θ の値を求めよ。

