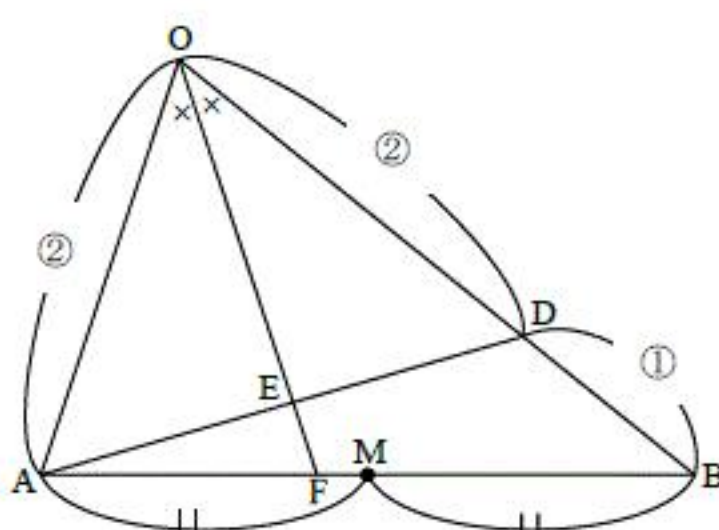


【1】

1.

題意より、△ABCは以下の図のようになっている。



図より、△OADは $OA=OD$ の二等辺三角形であるため、点Eは線分ADの midpointである。従って、 $\overrightarrow{OE}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

2.

3点O, E, Fは同一直線上に存在しているため、ある定数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= k\overrightarrow{OE} \\ &= \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、点Fは線分AB上の点であるため、ある定数 s を用いて、

$$\overrightarrow{OF} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

とも表せる。 $\vec{0}$ でない2ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに平行でないため、①、②式の係数を比較することにより、

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}k \\ 1-s = \frac{1}{3}k \end{cases}$$

を得る。これを解くことで、

$$k = \frac{6}{5}$$

であることがわかるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} \\ &= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{OF} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

3.

2の結果より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) - \vec{a} \\ &= -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

4.

$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{FM}$ は、 $\vec{a}, \vec{b}$ を用いてそれぞれ、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AF} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \left(-\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{10}(\vec{b} - \vec{a})\end{aligned}$$

と表せるため、

$$\begin{aligned}\frac{AM}{FM} &= \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{FM}|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}|\vec{b} - \vec{a}|}{\frac{1}{10}|\vec{b} - \vec{a}|} \\ &= 5\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{AM}{FM} = 5$

[2]

1.

与えられた漸化式に $n=1, 2, 3$ をそれぞれ代入することで、

$$\begin{aligned}\log_{a_1} a_1 &= \frac{3}{1} \\ \Leftrightarrow \log_{a_1} \sqrt{2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} &= a_1^3 \therefore a_1 = 2^{\frac{1}{6}} \\ \log_{a_1} a_2 &= \frac{4}{2} \\ \Leftrightarrow \log_{a_1} 2^{\frac{1}{6}} &= \frac{4}{2} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{6}} &= a_1^{\frac{4}{2}} \therefore a_1 = 2^{\frac{1}{12}} \\ \log_{a_1} a_3 &= \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow \log_{a_1} 2^{\frac{1}{12}} &= \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{12}} &= a_1^{\frac{5}{3}} \therefore a_1 = 2^{\frac{1}{20}}\end{aligned}$$

であることが分かる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = 2^{\frac{1}{6}}, a_3 = 2^{\frac{1}{12}}, a_4 = 2^{\frac{1}{20}}$$

2.

1.の結果より、第 n 項 a_n は、

$$a_n = 2^{\frac{1}{n(n+1)}} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

であると予想できる。以下、数学的帰納法を用いてこれを証明する。

[1] $n=1$ のとき

このとき、

$$2^{\frac{1}{1 \cdot 2}} = \sqrt{2} = a_1$$

より①は確かに成立する。

[2] $n=k$ (k : 自然数) で①が成立すると仮定したとき

このとき、与えられた漸化式に $n=k$ としたときの①を代入すると

$$\begin{aligned}\log_{a_{k+1}} a_k &= \frac{k+2}{k} \\ \Leftrightarrow \log_{a_{k+1}} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} &= \frac{k+2}{k} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{k(k+1)}} &= a_{k+1}^{\frac{k+2}{k}} \\ \therefore a_{k+1} &= 2^{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}\end{aligned}$$

となり、①は $n=k+1$ の場合にも成立する。

以上[1], [2]から、数学的帰納法により、任意の自然数 n について、

$$a_n = 2^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

は成立する。

(証明終)

3.

A_n の定義と 2.の結果より、

$$\begin{aligned}A_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \\ &= 2^{\frac{1}{1 \cdot 2}} \cdot 2^{\frac{1}{2 \cdot 3}} \cdot \cdots \cdot 2^{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= 2^{\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)}\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

であることを利用すれば、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

を得るため、

$$\begin{aligned}A_n &= 2^{\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)} \\ &= 2^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A_n = 2^{\frac{n}{n+1}}$$

4.

3.の結果より、

$$\begin{aligned}A_n &< 5^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{n+1}} &< 5^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2^{\frac{n}{n+1}} &< \log_{10} 5^{\frac{1}{3}} \left(\because 0 < 2^{\frac{n}{n+1}} < 5^{\frac{1}{3}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \log_{10} 2 &< \frac{1}{3} \log_{10} 5 \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \log_{10} 2 &< \frac{1}{3} (1 - \log_{10} 2) \left(\because \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 \right) \\ \Leftrightarrow 0.3010 \frac{n}{n+1} &< \frac{1}{3} (1 - 0.3010) \\ \Leftrightarrow 0.3010n &< 0.2330(n+1) \left(\because \frac{1}{3} (1 - 0.3010) = 0.2330 \right) \\ \Leftrightarrow 0.0680n &< 0.2330 \\ \Leftrightarrow n &< 3.42 \cdots\end{aligned}$$

である。従って、 $A_n < 5^{\frac{1}{3}}$ を満たす最大の n は

$$n=3$$

である。

(答) $n=3$

[3]

1.

題意より、 P_1, P_2 の座標は、

$$P_1\left(t, \frac{1}{2}t^2\right), P_2\left(kt, \frac{1}{2}k^2t^2\right)$$

である。また、放物線 C の式について、

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \\ = x$$

であるため、 ℓ_1 の傾きが t 、 ℓ_2 の傾きが kt であることに注意すると、直線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式は、それぞれ、

$$\ell_1: y - \frac{1}{2}t^2 = t(x - t) \therefore y = tx - \frac{1}{2}t^2 \\ \ell_2: y - \frac{1}{2}k^2t^2 = kt(x - kt) \therefore y = ktx - \frac{1}{2}k^2t^2$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \ell_1: y = tx - \frac{1}{2}t^2, \ell_2: y = ktx - \frac{1}{2}k^2t^2$$

2.

2 直線 ℓ_1, ℓ_2 が直交するとき、その傾きの積は -1 となるため、

$$t \cdot kt = -1 \\ \therefore k = -\frac{1}{t^2} \quad (\because t > 0)$$

である。一方、2 直線 ℓ_1, ℓ_2 の交点の x 座標は、 ℓ_1, ℓ_2 の方程式から y を消去することで、

$$tx - \frac{1}{2}t^2 = ktx - \frac{1}{2}k^2t^2 \\ \Leftrightarrow (kt - t)x = \frac{1}{2}(k^2t^2 - t^2) \\ \Leftrightarrow (kt - t)x = \frac{1}{2}(kt + t)(kt - t)$$

ここで $k=1$ とすると、直線 ℓ_1, ℓ_2 は同一の直線となり直交しないため題意を満たさない。従って $k \neq 1$ である。これと $t > 0$ より $kt - t \neq 0$ であるため、

$$(kt - t)x = \frac{1}{2}(kt + t)(kt - t) \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(kt + t) \\ \therefore x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \quad \left(\because k = -\frac{1}{t^2}\right)$$

である。この x を ℓ_1 の式に代入することで、2 直線 ℓ_1, ℓ_2 の交点の y 座標は、

$$y = t \cdot \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}t^2 \\ = -\frac{1}{2}$$

であることが分かる。以上より、求める交点の座標は、

$$\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), -\frac{1}{2}\right)$$

である。

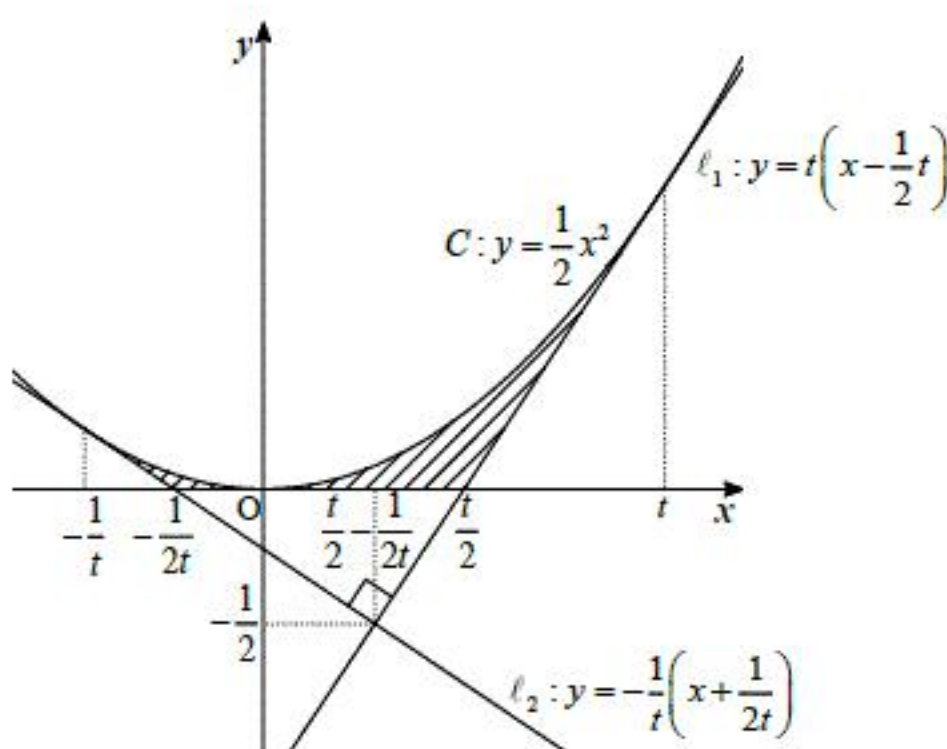
$$(\text{答}) \quad \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2t}, -\frac{1}{2}\right)$$

3.

ℓ_1, ℓ_2 が直交するとき、2 より $k = -\frac{1}{t^2}$ であるため、直線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式は、

$$\ell_1: y = t\left(x - \frac{1}{2}t\right) \\ \ell_2: y = -\frac{1}{t}\left(x + \frac{1}{2t}\right)$$

である。従って、求める面積は以下の図の斜線部である。



図より、求める面積 S は、

$$S = \int_{-1/t}^t \frac{1}{2}x^2 dx - \int_{-1/t}^{t/2} \left(-\frac{1}{t}x - \frac{1}{2t^2}\right) dx - \int_{t/2}^t \left(tx - \frac{1}{2}t^2\right) dx \\ = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1/t}^t - \left[-\frac{1}{2t}x^2 - \frac{1}{2t^2}x\right]_{-1/t}^{t/2} - \left[\frac{1}{2}tx^2 - \frac{1}{2}t^2x\right]_{t/2}^t \\ = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6t^3} - \left(-\frac{1}{8t^3} + \frac{1}{4t^3}\right) + \left(-\frac{1}{2t^3} + \frac{1}{2t^3}\right) - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^3\right) + \left(\frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{4}t^3\right) \\ = \frac{1}{24}\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right)$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{24}\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right)$$

4.

$t > 0$ であるため、相加相乗平均の関係より、

$$S = \frac{1}{24}\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right) \\ \geq \frac{1}{24} \cdot 2\sqrt{t^3 \cdot \frac{1}{t^3}} \\ = \frac{1}{12}$$

を得る。また、等号成立条件は、

$$t^3 = \frac{1}{t^3} \\ \Leftrightarrow t = 1 \quad (\because t > 0)$$

である。以上より、 S は、 $t=1$ で最小値 $\frac{1}{12}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } \frac{1}{12} (t=1)$$

〔4〕

1.

a_n の定義より,

$$a_n = 2(n-1)$$

である。従って, $f_n(x)$ は,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -x^2 + 2(n-1)x + 1 \\ &= -\{x-(n-1)\}^2 + (n-1)^2 + 1 \\ &= -\{x-(n-1)\}^2 + n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

と変形できるため, 2 次関数 $y = f_n(x)$ の頂点 P_n は,

$$P_n(n-1, n^2 - 2n + 2)$$

である。従って, x_n, y_n をそれぞれ n の式で表すと,

$$x_n = n-1, y_n = n^2 - 2n + 2$$

である。

(答) $x_n = n-1, y_n = n^2 - 2n + 2$

2.

1.より,

$$\begin{aligned} y_n &= n^2 - 2n + 2 \\ &= (n-1)^2 + 1 \\ &= x_n^2 + 1 \end{aligned}$$

であるため, 点 P_n はすべて,

$$y = x^2 + 1$$

上にある。従って, 求める 2 次関数 $g(x)$ は,

$$g(x) = x^2 + 1$$

である。

(答) $g(x) = x^2 + 1$

3.

1.より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 2) \\ &= \sum_{k=1}^n \{(k-1)^2 + 1\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + n \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + 7n) \\ \sum_{k=2}^{n+1} y_k &= \sum_{k=1}^n y_k + y_{n+1} - y_1 \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + 7n) + \{(n+1)^2 - 2(n+1) + 2\} - 1 \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 7n) \end{aligned}$$

と計算できる。一方, 2.より

$$g(x) > 0 \quad (x > 0)$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^n (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^n \\ &= \frac{1}{3}n^3 + n \end{aligned}$$

と計算できる。従って,

$$\begin{aligned} S_n - \sum_{k=1}^n y_k &= \left(\frac{1}{3}n^3 + n \right) - \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + 7n) \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \\ &= \frac{1}{6}n(3n-1) \\ &> 0 \left(\because n > \frac{1}{3} \right) \\ \sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 7n) - \left(\frac{1}{3}n^3 + n \right) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ &= \frac{1}{6}n(3n+1) \\ &> 0 \left(\because n > 0 \right) \end{aligned}$$

であるため,

$$\sum_{k=1}^n y_k < S_n < \sum_{k=2}^{n+1} y_k$$

が成り立つ。

(証明終)

4.

3.より,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n \right) - \left(S_n - \sum_{k=1}^n y_k \right) &= \frac{1}{6}n(3n+1) - \frac{1}{6}n(3n-1) \\ &= \frac{1}{3}n \\ &> 0 \left(\because n > 0 \right) \end{aligned}$$

であるため,

$$\sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n > S_n - \sum_{k=1}^n y_k$$

である。

(答) $\sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n > S_n - \sum_{k=1}^n y_k$