

[1]

1.

a_n の定義より,

$$a_n = 2(n-1)$$

である。従って, $f_n(x)$ は,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -x^2 + 2(n-1)x + 1 \\ &= -\{x-(n-1)\}^2 + (n-1)^2 + 1 \\ &= -\{x-(n-1)\}^2 + n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

と変形できるため, 2 次関数 $y = f_n(x)$ の頂点 P_n は,

$$P_n(n-1, n^2 - 2n + 2)$$

である。従って, x_n, y_n をそれぞれ n の式で表すと,

$$x_n = n-1, y_n = n^2 - 2n + 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad x_n = n-1, y_n = n^2 - 2n + 2$$

2.

1.より,

$$\begin{aligned} y_n &= n^2 - 2n + 2 \\ &= (n-1)^2 + 1 \\ &= x_n^2 + 1 \end{aligned}$$

であるため, 点 P_n はすべて,

$$y = x^2 + 1$$

上にある。従って, 求める 2 次関数 $g(x)$ は,

$$g(x) = x^2 + 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad g(x) = x^2 + 1$$

3.

1.より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 2) \\ &= \sum_{k=1}^n \{(k-1)^2 + 1\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + n \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + 7n) \\ \sum_{k=2}^{n+1} y_k &= \sum_{k=1}^n y_k + y_{n+1} - y_1 \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + 7n) + \{(n+1)^2 - 2(n+1) + 2\} - 1 \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 7n) \end{aligned}$$

と計算できる。一方, 2.より

$$g(x) > 0 \quad (x > 0)$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^n (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^n \\ &= \frac{1}{3}n^3 + n \end{aligned}$$

と計算できる。従って,

$$\begin{aligned} S_n - \sum_{k=1}^n y_k &= \left(\frac{1}{3}n^3 + n \right) - \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + 7n) \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \\ &= \frac{1}{6}n(3n-1) \\ &> 0 \quad \left(\because n > \frac{1}{3} \right) \\ \sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 7n) - \left(\frac{1}{3}n^3 + n \right) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ &= \frac{1}{6}n(3n+1) \\ &> 0 \quad (\because n > 0) \end{aligned}$$

であるため,

$$\sum_{k=1}^n y_k < S_n < \sum_{k=2}^{n+1} y_k$$

が成り立つ。

(証明終)

4.

3.より,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n \right) - \left(S_n - \sum_{k=1}^n y_k \right) &= \frac{1}{6}n(3n+1) - \frac{1}{6}n(3n-1) \\ &= \frac{1}{3}n \\ &> 0 \quad (\because n > 0) \end{aligned}$$

であるため,

$$\sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n > S_n - \sum_{k=1}^n y_k$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n > S_n - \sum_{k=1}^n y_k$$

[2]

1.

3 次関数 $y=f(x)$ は $x=a, b$ で極値をとるため、ある 0 でない実数 p を用いて、

$$f'(x)=3p(x-a)(x-b)$$

とおける。ここで、 $y=f(x)$ は $x=a$ で極大値、 $x=b$ で極小値をとること、および $a < b$ であることより、

$$f'(x) > 0 \quad (x < a, b < x)$$

であることが分かる。従って、

$$p > 0$$

である。ここで、点 $C(c, f(c))$ が $y=f(x)$ の変曲点であることから、

$$f''(c)=0$$

$$\Leftrightarrow 3p\{(c-a)+(c-b)\}=0$$

$$\Leftrightarrow 6p\left(c-\frac{a+b}{2}\right)=0$$

$$\therefore c=\frac{a+b}{2} \quad (\because p \neq 0)$$

が分かるから、変曲点 C における、 $y=f(x)$ の接線 ℓ の傾きは、

$$f'(c)=3p(c-a)(c-b)$$

$$=3p \cdot \frac{b-a}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \left(\because c=\frac{a+b}{2} \right)$$

$$=-\frac{3}{4}p(b-a)^2$$

である。一方、2 点 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ を通る直線の傾きを m とすると、

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

である。ここで、

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$$

$$=3p\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$=3p \cdot \frac{-(b-a)^3}{6}$$

$$=-\frac{1}{2}p(b-a)^3$$

であるため、

$$f'(c)=-\frac{3}{4}p(b-a)^2$$

$$=\frac{3}{2}\left\{-\frac{1}{2}p(b-a)^2\right\}$$

$$=\frac{3}{2} \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{3}{2}m$$

を得る。以上より題意は示された。

(証明終)

2.

条件より、

$$f(b)-f(a)=(-b^3+3ab^2)-(-a^3+3a^2b)$$

$$=-(b-a)^3$$

であるため、1.で示した

$$f(b)-f(a)=-\frac{1}{2}p(b-a)^3$$

と比べて、

$$p=2$$

である。従って、

$$f'(x)=6(x-a)(x-b)$$

$$=6x^2-6(a+b)x+6ab$$

$$f(x)=\int f(x)dx$$

$$=2x^3-3(a+b)x^2+6abx+C$$

を得る。ただし、 C は積分定数である。ここで、題意より、

$$f(a)=-a^3+3a^2b$$

であるため、

$$C=0$$

である。従って、

$$f(x)=2x^3-3(a+b)x^2+6abx$$

であることが分かる。また、直線 ℓ の式は、

$$\ell: y=f'(c)x+f(c)-cf'(c)$$

と書ける。ここで、

$$f'(c)=-\frac{3}{2}(b-a)^2$$

$$f(c)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-3(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+6ab\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(a+b)^3+3ab(a+b)$$

$$f(c)-cf'(c)=\left\{-\frac{1}{2}(a+b)^3+3ab(a+b)\right\}-\frac{a+b}{2}\left\{-\frac{3}{2}(b-a)^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}(a+b)^3+\frac{3}{4}(a+b)\{4ab+(a-b)^2\}$$

$$=-\frac{1}{2}(a+b)^3+\frac{3}{4}(a+b)^3$$

$$=\frac{1}{4}(a+b)^3$$

であることから、直線 ℓ は、

$$\ell: y=f'(c)x+f(c)-cf'(c)$$

$$\Leftrightarrow \ell: y=-\frac{3}{2}(b-a)^2x+\frac{1}{4}(a+b)^3$$

であると分かる。

$$(\text{答}) \quad f(x)=2x^3-3(a+b)x^2+6abx, \ell: y=-\frac{3}{2}(b-a)^2x+\frac{1}{4}(a+b)^3$$

[3]

1.

曲線 C の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

の両辺を x で微分することで,

$$\begin{aligned}\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}\end{aligned}$$

を得る。

[1] $q \neq 0$ のとき

ℓ は点 $P(p, q)$ を通る傾き $-\frac{b^2 p}{a^2 q}$ の直線であるため, その方程式は,

$$\begin{aligned}\ell: y - q &= -\frac{b^2 p}{a^2 q}(x - p) \\ \Leftrightarrow \ell: \frac{q}{b^2}(y - q) &= -\frac{p}{a^2}(x - p) \\ \Leftrightarrow \ell: \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} &= \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \\ \therefore \ell: \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} &= 1 \left(\because \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 \right)\end{aligned}$$

である。

[2] $q = 0$ のとき

以下, すべて複合同順とする。このとき, $p = \pm a$ であるため,

$$\ell: x = \pm a$$

であるが, これは[1]で得られた式において,

$$p = \pm a, q = 0$$

としたものと一致する。

以上, [1], [2]より, 直線 ℓ の方程式は,

$$\ell: \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad \ell: \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$$

2.

点 P が曲線 C の第 1 象限の部分動くため,

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 \quad (p > 0, q > 0)$$

を満たす。直線 ℓ の x 切片, y 切片がそれぞれ点 Q, R であるから,

$$Q\left(\frac{a^2}{p}, 0\right), R\left(0, \frac{b^2}{q}\right)$$

である。以上より, 線分 QR の長さを L とすると,

$$\begin{aligned}L^2 &= \left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{q}\right)^2 \\ &= \frac{a^4}{p^2} + \frac{b^4}{q^2} \\ &= \left(\frac{a^4}{p^2} + \frac{b^4}{q^2}\right) \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right) \left(\because \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1\right) \\ &= (a^2 + b^2) \left(\frac{a^4 q^2}{b^2 p^2} + \frac{b^4 p^2}{a^2 q^2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 相加・相乗平均の関係を用いることで,

$$\begin{aligned}\frac{a^4 q^2}{b^2 p^2} + \frac{b^4 p^2}{a^2 q^2} &\geq 2\sqrt{\frac{a^4 q^2}{b^2 p^2} \cdot \frac{b^4 p^2}{a^2 q^2}} \\ &= 2ab \quad (\because a > 0, b > 0)\end{aligned}$$

が得られるため,

$$\begin{aligned}L^2 &= (a^2 + b^2) \left(\frac{a^4 q^2}{b^2 p^2} + \frac{b^4 p^2}{a^2 q^2}\right) \\ &\geq (a^2 + b^2) + 2ab \\ &= (a + b)^2\end{aligned}$$

である。ここで, 等号成立条件について考える。等号が成立する場合,

$$\begin{aligned}\frac{a^4 q^2}{b^2 p^2} &= \frac{b^4 p^2}{a^2 q^2} \\ \Leftrightarrow \frac{p^2}{a^3} &= \frac{q^2}{b^3}\end{aligned}$$

が成り立っている。このとき,

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{p^2}{a^2} + \frac{bp^2}{a^3} &= 1 \\ \therefore p &= \sqrt{\frac{a^3}{a+b}} \quad (\because p > 0) \\ q &= b\sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2}} \left(\because \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 \right) \\ &= b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}p &= \sqrt{\frac{a^3}{a+b}} \\ &= a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ &< a \\ q &= b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \\ &< b\end{aligned}$$

より, これらは $p < a, q < b$ を満たしている。逆に,

$$p = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, q = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

となる場合が存在し, そのとき等号が成立する。以上より, 線分 QR の長さは,

$$p = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, q = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

のときに最小値,

$$a + b$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad a + b$$