

[1]

1.

点Bの座標を、 $B(x_B, y_B, 0)$ とおく。このとき、 $OB=AB=1$ であることから、

$$\begin{cases} x_B^2 + y_B^2 = 1 \\ (x_B - 1)^2 + y_B^2 = 1 \end{cases}$$

が成り立つ。この2式の差を取ることで、

$$x_B = \frac{1}{2}$$

を得る。 $y_B > 0$ より、

$$y_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であることが分かるため、点Bの座標は、

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

である。

$$(\text{答}) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

2.

点Cの座標を、 $C(x_C, y_C, z_C)$ とおく。このとき、 $OC=AC=BC=1$ であることから、

$$\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 = 1 & \dots \textcircled{1} \\ (x_C - 1)^2 + y_C^2 + z_C^2 = 1 & \dots \textcircled{2} \\ \left(x_C - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z_C^2 = 1 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。①式と②式の差を取ることで、

$$x_C = \frac{1}{2}$$

を得る。これを②式、③式に代入すると、

$$\begin{cases} y_C^2 + z_C^2 = \frac{3}{4} & \dots \textcircled{2}' \\ \left(y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z_C^2 = 1 & \dots \textcircled{3}' \end{cases}$$

となる。②'式と③'式の差を取ることで、

$$y_C = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

を得る。これと、 $z_C > 0$ であることから、

$$z_C = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

であることが分かるため、点Cの座標は、

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

である。

$$(\text{答}) C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

3.

点Dの座標を、 $D(x_D, y_D, z_D)$ とおく。このとき、 $OD=AD=BD=CD$ であることから、

$$\begin{cases} (x_D - 1)^2 + y_D^2 + z_D^2 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 & \dots \textcircled{4} \\ \left(x_D - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_D - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z_D^2 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 & \dots \textcircled{5} \\ \left(x_D - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_D - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z_D - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 & \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

が成り立つ。④式より、

$$x_D = \frac{1}{2}$$

であることが分かる。これを⑤式に代入することで、

$$y_D = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

を得ることができ、これらを⑥式に代入することで、

$$z_D = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

を得る。以上より、点Dの座標は、

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$$

である。

$$(\text{答}) D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$$

4.

$\triangle OAD$ についての余弦定理より、

$$\cos \theta = \frac{DO^2 + DA^2 - OA^2}{2DO \cdot DA}$$

が成り立つ。ここで、

$$OA = 1$$

$$DO = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$DA = DO$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}$$

であるため、

$$\cos \theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

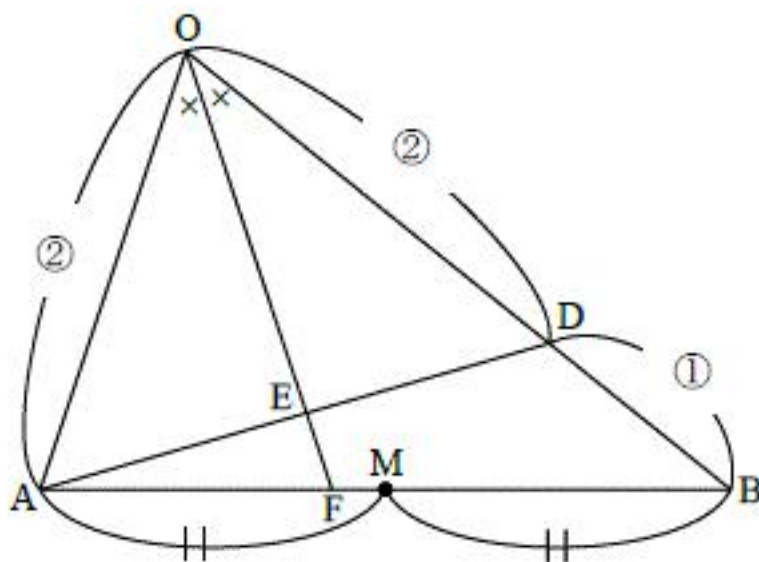
となる。

$$(\text{答}) \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

[2]

1.

題意より、 $\triangle ABC$ は以下の図のようになっている。



図より、 $\triangle OAD$ は $OA = OD$ の二等辺三角形であるため、点 E は線分 AD の中点である。従って、 $\overrightarrow{OE}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

2.

3 点 O, E, F は同一直線上に存在しているため、ある定数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= k\overrightarrow{OE} \\ &= \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 F は線分 AB 上の点であるため、ある定数 s を用いて、

$$\overrightarrow{OF} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

とも表せる。 $\vec{0}$ でない 2 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに平行でないため、①、②式の係数を比較することにより、

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}k \\ 1-s = \frac{1}{3}k \end{cases}$$

を得る。これを解くことで、

$$k = \frac{6}{5}$$

であることがわかるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} \\ &= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OF} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

3.

2.の結果より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) - \vec{a} \\ &= -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

4.

$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{FM}$ は、 $\vec{a}, \vec{b}$ を用いてそれぞれ、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \\ \overrightarrow{FM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AF} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \left(-\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{10}(\vec{b} - \vec{a})\end{aligned}$$

と表せるため、

$$\begin{aligned}\frac{AM}{FM} &= \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{FM}|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}|\vec{b} - \vec{a}|}{\frac{1}{10}|\vec{b} - \vec{a}|} \\ &= 5\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{AM}{FM} = 5$$

[3]

1.

与えられた漸化式に $n=1, 2, 3$ をそれぞれ代入することで,

$$\begin{aligned}\log_{a_1} a_1 &= \frac{3}{1} \\ \Leftrightarrow \log_{a_1} \sqrt{2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} &= a_1^3 \therefore a_1 = 2^{\frac{1}{6}} \\ \log_{a_1} a_2 &= \frac{4}{2} \\ \Leftrightarrow \log_{a_1} 2^{\frac{1}{6}} &= \frac{4}{2} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{6}} &= a_1^{\frac{4}{2}} \therefore a_1 = 2^{\frac{1}{12}} \\ \log_{a_1} a_3 &= \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow \log_{a_1} 2^{\frac{1}{12}} &= \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{12}} &= a_1^{\frac{5}{3}} \therefore a_1 = 2^{\frac{1}{20}}\end{aligned}$$

であることが分かる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = 2^{\frac{1}{6}}, a_3 = 2^{\frac{1}{12}}, a_4 = 2^{\frac{1}{20}}$$

2.

1.の結果より, 第 n 項 a_n は,

$$a_n = 2^{\frac{1}{n(n+1)}} \quad \dots \textcircled{1}$$

であると予想できる。以下, 数学的帰納法を用いてこれを証明する。

[1] $n=1$ のとき

このとき,

$$2^{\frac{1}{1 \cdot 2}} = \sqrt{2} = a_1$$

より①は確かに成立する。

[2] $n=k$ (k : 自然数) で①が成立すると仮定したとき

このとき, 与えられた漸化式に $n=k$ としたときの①を代入すると

$$\begin{aligned}\log_{a_{k+1}} a_k &= \frac{k+2}{k} \\ \Leftrightarrow \log_{a_{k+1}} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} &= \frac{k+2}{k} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{k(k+1)}} &= a_{k+1}^{\frac{k+2}{k}} \\ \therefore a_{k+1} &= 2^{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}\end{aligned}$$

となり, ①は $n=k+1$ の場合にも成立する。

以上[1], [2]から, 数学的帰納法により, 任意の自然数 n について,

$$a_n = 2^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

は成立する。

(証明終)

3.

A_n の定義と 2.の結果より,

$$\begin{aligned}A_n &= a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \\ &= 2^{\frac{1}{1 \cdot 2}} \cdot 2^{\frac{1}{2 \cdot 3}} \cdots 2^{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= 2^{\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)}\end{aligned}$$

である。ここで,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

であることを利用すれば,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

を得るため,

$$\begin{aligned}A_n &= 2^{\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)} \\ &= 2^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A_n = 2^{\frac{n}{n+1}}$$

4.

3.の結果より,

$$\begin{aligned}A_n &< 5^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{n+1}} &< 5^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2^{\frac{n}{n+1}} &< \log_{10} 5^{\frac{1}{3}} \left(\because 0 < 2^{\frac{n}{n+1}} < 5^{\frac{1}{3}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \log_{10} 2 &< \frac{1}{3} \log_{10} 5 \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \log_{10} 2 &< \frac{1}{3} (1 - \log_{10} 2) \left(\because \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 \right) \\ \Leftrightarrow 0.3010 \frac{n}{n+1} &< \frac{1}{3} (1 - 0.3010) \\ \Leftrightarrow 0.3010n &< 0.2330(n+1) \left(\because \frac{1}{3} (1 - 0.3010) = 0.2330 \right) \\ \Leftrightarrow 0.0680n &< 0.2330 \\ \Leftrightarrow n &< 3.42 \cdots\end{aligned}$$

である。従って, $A_n < 5^{\frac{1}{3}}$ を満たす最大の n は

$$n=3$$

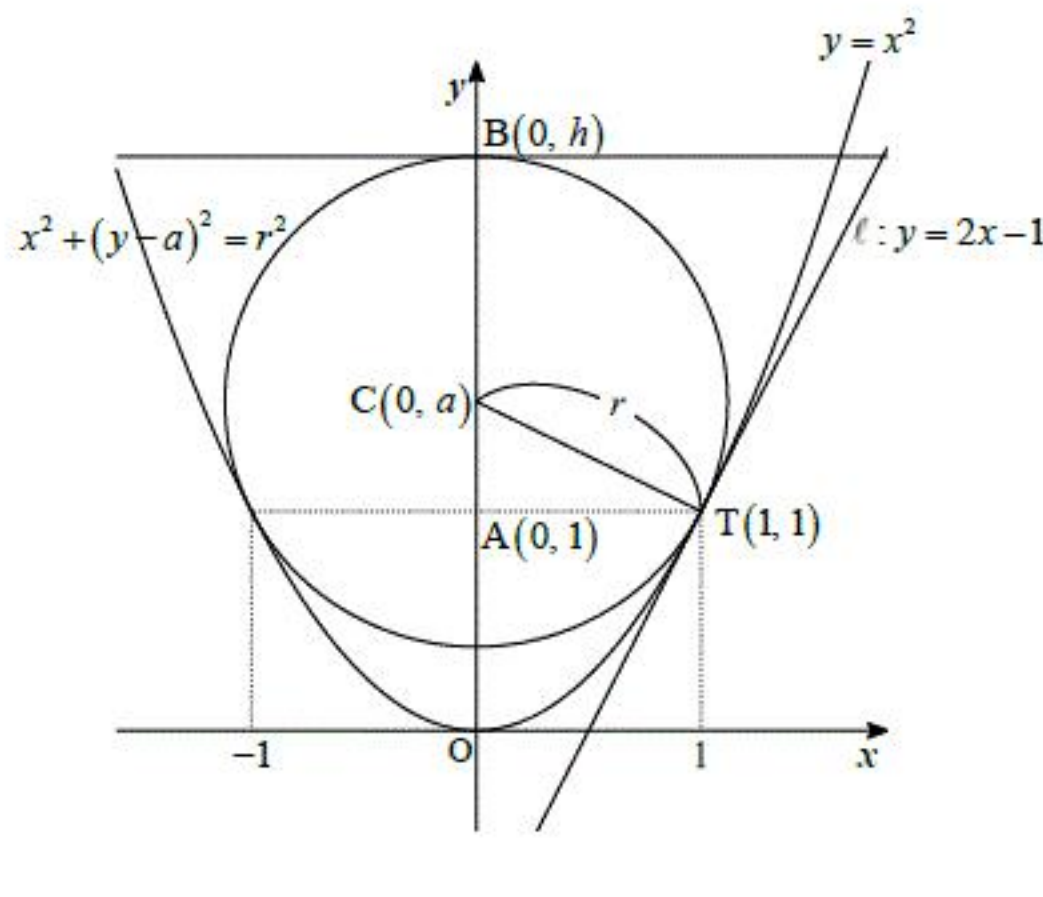
である。

(答) $n=3$

【4】

1.

条件より、円、放物線、直線の位置関係は以下の図のようになっている。



点A, B, C, Tを上図のように定める。円と放物線は点T(1, 1)で接しているから、点Tを通過する円と放物線との共通接線、

$$\ell: y = 2x - 1$$

が存在する。CT ⊥ ℓ より、CT の傾きは $-\frac{1}{2}$ である。従って、AT = 1 であるため、 $AC = \frac{1}{2}$ が

分かるから、

$$\begin{aligned} a &= OA + AC \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。また、これらより

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{AT^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

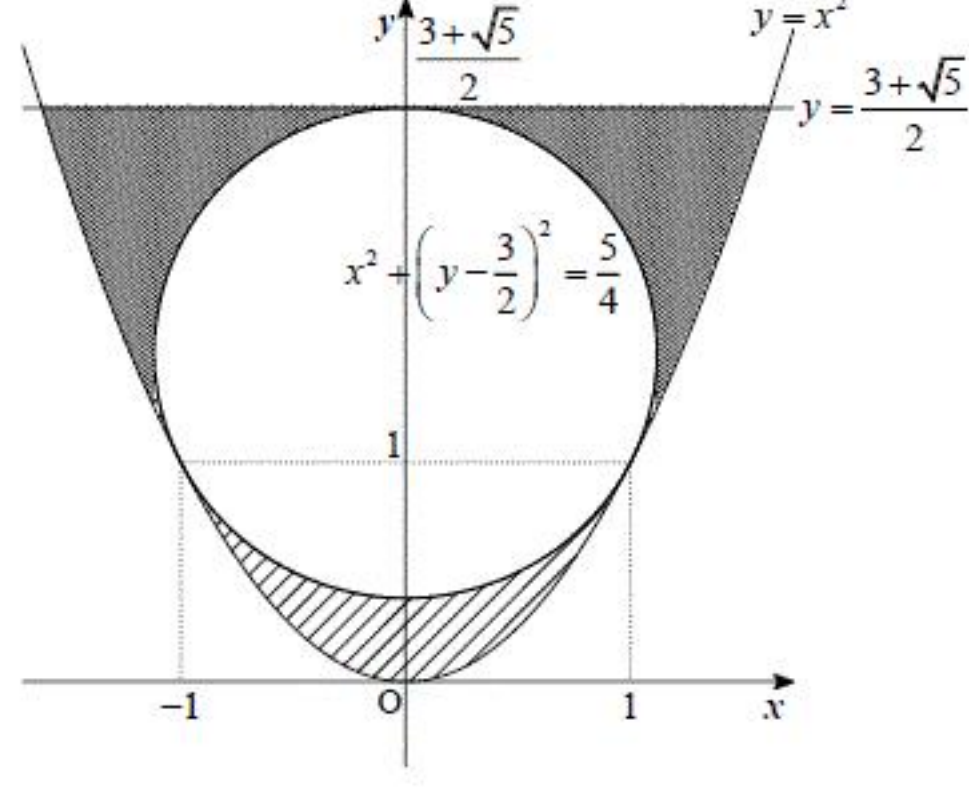
$$\begin{aligned} h &= OC + CB \\ &= OC + CT \\ &= a + r \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

が分かる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3}{2}, r = \frac{\sqrt{5}}{2}, h = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

2.

領域 E_1 は円の外部、放物線の上部のうち y 座標が1以下の部分であり、領域 E_2 は円の外部、放物線の上部のうち y 座標が1以上 h 以下の部分である。従って、領域 E_1 は下図の斜線部、領域 E_2 は下図の打点部である。ただし、境界線はすべて含む。



(答) 前図

3.

まず、 V_1 について考える。1. で求めた a, r, h に対して、連立不等式

$$y \geq x^2, y \leq 1$$

で表される領域を D_{1a} とし、連立不等式

$$x^2 + (y - a)^2 \leq r^2, y \leq 1$$

で表される領域を D_{1b} とする。また、 D_{1a}, D_{1b} を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積をそれぞれ U_{1a}, U_{1b} とする。このとき、

$$V_1 = U_{1a} - U_{1b}$$

が成り立つ。 U_{1a} について、

$$y = x^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} U_{1a} &= \pi \int_0^1 x^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 y dy \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。また、 U_{1b} について、

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = r^2 - (y - a)^2$$

であり、円と y 軸との交点のうちで小さい方の座標は

$$0^2 + (y - a)^2 = r^2$$

$$\therefore y = a - r$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} U_{1b} &= \pi \int_{a-r}^1 x^2 dy \\ &= \pi \int_{a-r}^1 \{r^2 - (y - a)^2\} dy \\ &= \pi \left[r^2 y - \frac{1}{3} (y - a)^3 \right]_{a-r}^1 \\ &= \pi \left\{ r^2 - \frac{1}{3} (1 - a)^3 \right\} - \pi \left\{ r^2 (a - r) - \frac{1}{3} (-r)^3 \right\} \\ &= \pi \cdot \frac{31}{24} - \pi \left(\frac{15}{8} - \frac{5\sqrt{5}}{12} \right) \\ &= \pi \left(\frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{7}{12} \right) \end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned} V_1 &= U_{1a} - U_{1b} \\ &= \frac{\pi}{2} - \pi \left(\frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{7}{12} \right) \\ &= \frac{13 - 5\sqrt{5}}{12} \pi \end{aligned}$$

である。同様に、 V_2 についても考える。1. で求めた a, r, h に対して、連立不等式

$$y \geq x^2, 1 \leq y \leq h$$

で表される領域を D_{2a} とし、連立不等式

$$x^2 + (y - a)^2 \leq r^2, 1 \leq y \leq h$$

で表される領域を D_{2b} とする。また、 D_{2a}, D_{2b} を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積をそれぞれ U_{2a}, U_{2b} とする。このとき、

$$V_2 = U_{2a} - U_{2b}$$

が成り立つ。 U_{2a} について、

$$y = x^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} U_{2a} &= \pi \int_1^h x^2 dy \\ &= \pi \int_1^h y dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^h \\ &= \pi \left(\frac{h^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{5 + 3\sqrt{5}}{4} \pi \end{aligned}$$

である。また、 U_{2b} について、

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = r^2 - (y - a)^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} U_{2b} &= \pi \int_1^h x^2 dy \\ &= \pi \int_1^h \{r^2 - (y - a)^2\} dy \\ &= \pi \left[r^2 y - \frac{1}{3} (y - a)^3 \right]_1^h \\ &= \pi \left\{ r^2 h - \frac{1}{3} (h - a)^3 \right\} - \pi \left\{ r^2 - \frac{1}{3} (1 - a)^3 \right\} \\ &= \pi \left(\frac{15}{8} + \frac{5\sqrt{5}}{12} \right) - \pi \cdot \frac{31}{24} \\ &= \pi \left(\frac{7}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{12} \right) \end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned} V_2 &= U_{2a} - U_{2b} \\ &= \frac{5 + 3\sqrt{5}}{4} \pi - \pi \left(\frac{7}{12} + \frac{5\sqrt{5}}{12} \right) \\ &= \frac{2 + \sqrt{5}}{3} \pi \end{aligned}$$

である。以上より、 $\frac{V_1}{V_2}$ は、

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{13 - 5\sqrt{5}}{12} \pi}{\frac{2 + \sqrt{5}}{3} \pi} \\ &= \frac{13 - 5\sqrt{5}}{4(2 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{(13 - 5\sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}{4(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} \\ &= \frac{23\sqrt{5} - 51}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{23\sqrt{5} - 51}{4}$$