

〔1〕

1.

点Gは△ABCの重心であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{3} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$

2.

点Cは点Oと一致しないから、 $r \neq 0$ かつ $s \neq 0$ である。よって、 $\overrightarrow{a} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{b} = \frac{1}{s}\overrightarrow{OD}$ を代入することで、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3r}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3s}\overrightarrow{OD}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3r}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3s}\overrightarrow{OD}$$

3.

点Gは直線CD上にある。2より、それぞれのベクトルの係数に着目することで

$$\frac{1}{3r} + \frac{1}{3s} = 1$$

を満たすことがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 3$$

4.

△OCDと△OABの面積が等しいとき、

$$OC \cdot OD = OA \cdot OB$$

であるから、

$$rs = 1$$

を満たす。よって、3.の関係式に代入することで

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} + r &= 3 \\ \Leftrightarrow r^2 - 3r + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

となるが、点Cは辺OA上にあるから、 $0 \leq r \leq 1$ を満たす。したがって、

$$r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

5.

OC:CA=3:1のとき

$$r = \frac{3}{4}$$

であるから、3.の関係式に代入することで、

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} + \frac{1}{s} &= 3 \\ \therefore s &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$OD:DB=3:2$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad OD:DB=3:2$$

[2]

1.

与えられた漸化式

$$\begin{cases} a_1 = p \\ a_2 = q \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$$

より,

$$\begin{aligned} a_3 &= 3a_2 - 2a_1 \\ &= -2p + 3q \end{aligned}$$

である。同様にして,

$$\begin{aligned} a_4 &= 3(-2p + 3q) - 2q = -6p + 7q \\ a_5 &= 3(-6p + 7q) - 2(-2p + 3q) = -14p + 15q \\ a_6 &= 3(-14p + 15q) - 2(-6p + 7q) = -30p + 31q \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_3 = -2p + 3q, a_4 = -6p + 7q, a_5 = -14p + 15q, a_6 = -30p + 31q$$

2.

$b_n = a_{n+1} - a_n$ であるから, 1. より,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 = -p + q \\ b_2 &= a_3 - a_2 = (-2p + 3q) - q = 2(-p + q) \\ b_3 &= a_4 - a_3 = (-6p + 7q) - (-2p + 3q) = 4(-p + q) \\ b_4 &= a_5 - a_4 = (-14p + 15q) - (-6p + 7q) = 8(-p + q) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_1 = -p + q, b_2 = 2(-p + q), b_3 = 4(-p + q), b_4 = 8(-p + q)$$

3.

$b_n = a_{n+1} - a_n$ より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= (3a_{n+1} - 2a_n) - a_{n+1} \\ &= 2(a_{n+1} - a_n) \\ &= 2b_n \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 \cdot 2^{n-1} \\ &= (-p + q) \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

である。 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= p + \frac{(-p + q)(1 - 2^n)}{1 - 2} \\ &= (-p + q) \cdot 2^{n-1} + 2p - q \end{aligned}$$

となる。この式は $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = (-p + q) \cdot 2^{n-1} + 2p - q$$

4.

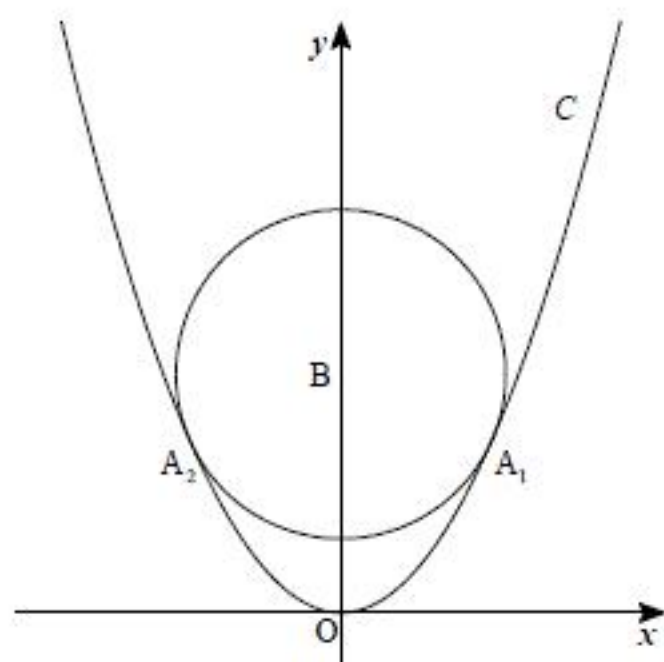
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{(-p + q) \cdot 2^{k-1} + 2p - q\} \\ &= \frac{(-p + q)(1 - 2^n)}{1 - 2} + (2p - q)n \\ &= (-p + q)(2^n - 1) + (2p - q)n \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_n = (-p + q)(2^n - 1) + (2p - q)n$$

[3]

1.



題意より、放物線 C と円の位置関係は上図のようになっている。以下、題意のような位置関係になるような r についての条件を、与えられた条件の同値変形によって求める。

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ x^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases} \text{を満たす異なる } (x, y) \text{ の組は 2 組存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - b\right)^2 = r^2 \end{cases} \text{を満たす異なる } (x, y) \text{ の組は 2 組存在する}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + (-8b+16)x^2 + 16b^2 - 16r^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \text{ を満たす異なる } x \text{ の値は 2 組存在する} \quad \cdots (*)$$

ここで、 x に関する方程式①が $x=0$ を解に持つとすると、方程式①は

$$x^2(x^2 + (-8b+16)) = 0$$

となり、この方程式の解は 1 つか異なる 3 つになってしまう。よって①は $x=0$ を解にもってはならないから、 $x^2=t$ とおくと、条件(*)は次の条件と同値である。

$$t^2 + (-8b+16)t + 16b^2 - 16r^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \text{ を満たす } t(>0) \text{ の値は 1 組存在する}$$

$$\Leftrightarrow \text{判別式 } \frac{D}{4} = (-4b+8)^2 - (16b^2 - 16r^2) = 0 \text{ かつ } t = -\frac{1}{2}(-8b+16) > 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 4b - 4 \text{ かつ } b > 2$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{4}r^2 + 1 \text{ かつ } r > 2 (\because r > 0)$$

また、このとき

$$t = -\frac{1}{2}(-8b+16) = r^2 - 4$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{t} = \pm\sqrt{r^2 - 4} \quad (\because r > 2)$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}r^2 - 1$$

となるから、点 B, A_1, A_2 の座標は

$$B\left(0, \frac{1}{4}r^2 + 1\right), A_1\left(\sqrt{r^2 - 4}, \frac{1}{4}r^2 - 1\right), A_2\left(-\sqrt{r^2 - 4}, \frac{1}{4}r^2 - 1\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \ B\left(0, \frac{1}{4}r^2 + 1\right), A_1\left(\sqrt{r^2 - 4}, \frac{1}{4}r^2 - 1\right), A_2\left(-\sqrt{r^2 - 4}, \frac{1}{4}r^2 - 1\right), r > 2$$

2.

$r=4$ のとき

$$B(0, 5), A_1(2\sqrt{3}, 3), A_2(-2\sqrt{3}, 3)$$

であるから、

$$\overrightarrow{BA_1} = (2\sqrt{3}, -2), \overrightarrow{BA_2} = (-2\sqrt{3}, -2)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \cos \angle A_1BA_2 &= \frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2}}{|\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{BA_2}|} \\ &= \frac{-12 + 4}{4 \times 4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \angle A_1BA_2 = 120^\circ \quad (\because 0^\circ < \angle A_1BA_2 < 180^\circ)$$

である。

$$(\text{答}) \ \angle A_1BA_2 = 120^\circ$$

3.

放物線 C と線分 BA_1, BA_2 で囲まれた面積から、中心角 120° のおうぎ形の面積を引くことで求めるべき面積を計算する。放物線 C と線分 BA_1, BA_2 で囲まれた部分を直線 $y=3$ の上下で 2 つに分けて考えることで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ + \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(3 - \frac{1}{4}x^2\right) dx - \pi \cdot 4^2 \times \frac{1}{3} &= 4\sqrt{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3}))^3}{6} - \frac{16}{3}\pi \\ &= 12\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ 12\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi$$

〔4〕

1.

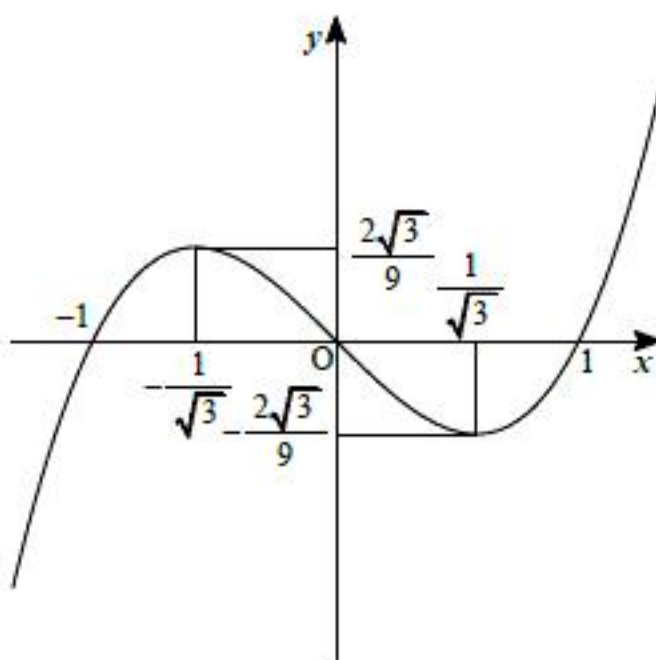
与えられた関数 $f(x) = x^3 - x$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ &= 3 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

となるから、増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

したがって $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 極大値: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 極小値: $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 曲線 $y = f(x)$ のグラフ: 上図

2.

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t \\ &= (3t^2 - 1)x - 2t^3 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$

3.

曲線 $y = x^3 - x$ と直線 $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ を連立することで、

$$\begin{aligned} x^3 - x &= (3t^2 - 1)x - 2t^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3t^2x + 2t^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - t)^2(x + 2t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = t, -2t$$

となるから、求める点 B の x 座標は $-2t$ である。ここで点 B は曲線 $y = f(x)$ 上にあるから、点 B の y 座標は

$$(-2t)^3 - (-2t) = -8t^3 + 2t$$

である。

(答) $(-2t, -8t^3 + 2t)$

4.

座標平面における三角形の面積を求める公式より、 $\triangle OAB$ の面積は

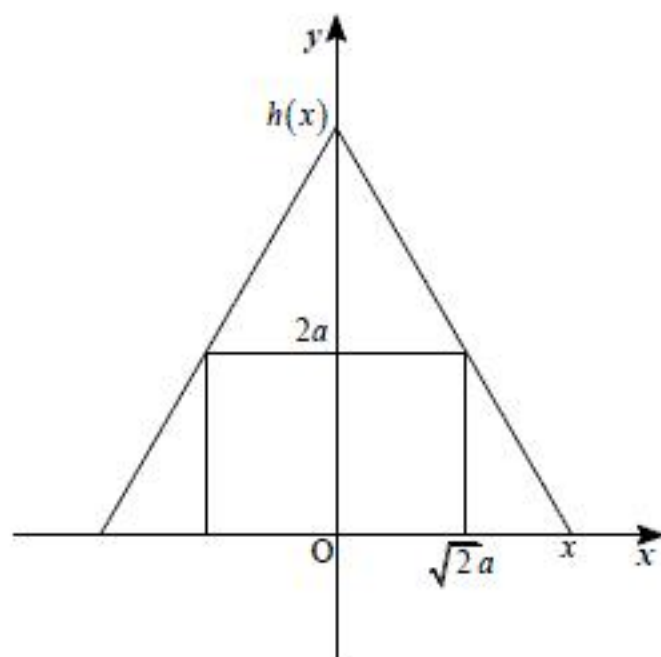
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| (-2t)(t^3 - t) - t(-8t^3 + 2t) \right| &= \frac{1}{2} \left| 6t^4 \right| \\ &= 3t^4 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $3t^4$

[5]

1.



円錐の底円の中心を原点とし，円錐の頂点を y 軸正方向におく。立方体の底面の対角線と y 軸を含む平面で切った断面は上図のようになる。三角形の相似より

$$\sqrt{2}a:(h(x)-2a)=x:h(x)$$

$$\therefore h(x)=\frac{2ax}{x-\sqrt{2}a}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{2ax}{x-\sqrt{2}a}$$

2.

円錐の体積 $V(x)$ は，1.より，

$$\frac{1}{3}\pi x^2 h(x)=\frac{2\pi ax^3}{3(x-\sqrt{2}a)}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{2\pi ax^3}{3(x-\sqrt{2}a)}$$

3.

2.より， $V(x)=\frac{2\pi ax^3}{3(x-\sqrt{2}a)}$ であるから，これを微分すると

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{2\pi a\{3x^2(x-\sqrt{2}a)-x^3\}}{3(x-\sqrt{2}a)^2} \\ &= \frac{2\pi ax^2(2x-3\sqrt{2}a)}{3(x-\sqrt{2}a)^2} \end{aligned}$$

となるから，増減表は以下ようになる。

x	0	...	$\frac{3\sqrt{2}}{2}a$	...
$V'(x)$	$\times$	-	0	+
$V(x)$	$\times$	$\searrow$	$9\pi a^3$	$\nearrow$

したがって， $V(x)$ の最小値は $9\pi a^3 \left(x = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \right)$ である。

$$(\text{答}) 9\pi a^3 \left(x = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \text{ のとき} \right)$$

4.

立方体の表面積は

$$6 \times (2a)^2 = 24a^2$$

である。円錐の表面積は

$$\pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + \{h(x)\}^2} = \pi x^2 \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{x-\sqrt{2}a} \right)^2} \right\}$$

であるから， $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$ のとき

$$\frac{9}{2}\pi a^2 \left\{ 1 + \sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} \right\} = 18\pi a^2$$

となる。したがって立方体と円錐の表面積の比は

$$24a^2 : 18\pi a^2 = 4 : 3\pi$$

である。

$$(\text{答}) 4:3\pi$$