

[1]

1.

$$f(1) = 6 \times 1^5 - 15 \times 1^4 + 10 \times 1^3 - 1 = 0$$

$$f(2) = 6 \times 2^5 - 15 \times 2^4 + 10 \times 2^3 - 2 = 30$$

$$f(3) = 6 \times 3^5 - 15 \times 3^4 + 10 \times 3^3 - 3 = 510$$

(答) $f(1)=0, f(2)=30, f(3)=510$

2.

[1] $n=1$ のとき

$$f(n) = f(1) = 0$$

より, $f(n)$ は 30 で割り切れる。

[2] $n=k$ のとき $f(n)$ は 30 で割り切れると仮定する。

K を整数として $f(k)=30K$ とあらわせるので, $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 6(k+1)^5 - 15(k+1)^4 + 10(k+1)^3 - (k+1) \\ &= 6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k \\ &= f(k) + 30k^4 \\ &= 30(K + k^4) \end{aligned}$$

より, $n=k+1$ のときも $f(n)$ は 30 で割り切れる。

以上 [1], [2] より帰納的に $f(n)$ は 30 で割り切れることが示された。

(証明終)

[2]

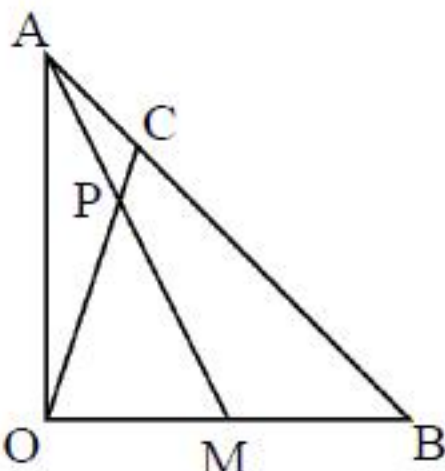
1.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{OP}{OC} \overrightarrow{OC}$$

$$= r \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{AP}{AM} \overrightarrow{AM}$$

$$= s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$



$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = r \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}, \quad \overrightarrow{AP} = s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$

2.

1. より $\overrightarrow{AP} = s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$ なので,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= \vec{a} + s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$

$$= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b}$$

また 1. より $\overrightarrow{OP} = r \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$ とも表される。 $\vec{a}, \vec{b}$ はそれぞれ一次独立なので、それぞれの係数を比べて

$$\begin{cases} 1-s = \frac{3}{4}r \\ \frac{1}{4}r = \frac{1}{2}s \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{2}{5}, r = \frac{4}{5}$$

$$(\text{答}) \quad s = \frac{2}{5}, r = \frac{4}{5}$$

3.

$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形なので

$$\begin{cases} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 4^2 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

$$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

また,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

2. より,

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5} \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

また, $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ より,

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2} = \sqrt{10}$$

2. より $OP:PC = 4:1, AM:AP = 5:2$ なので,

$$|\overrightarrow{PC}| = \frac{1}{4} |\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{2}{5} |\overrightarrow{AM}| = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$(\text{答}) \quad PC = \frac{\sqrt{5}}{5}, AP = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

4.

$\triangle APC$ に余弦定理を用いると,

$$\cos \angle APC = \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot PC}$$

$$= \frac{\left(\frac{2\sqrt{10}}{5} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 - \left(4 \cdot \frac{1}{4} \right)^2}{2 \times \frac{2\sqrt{10}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって,

$$\angle APC = \frac{\pi}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \angle APC = \frac{\pi}{4}$$

[3]

1.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$$

$$f(1) = 4$$

$$f(3) = 0$$

よって増減表は次のようになる。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

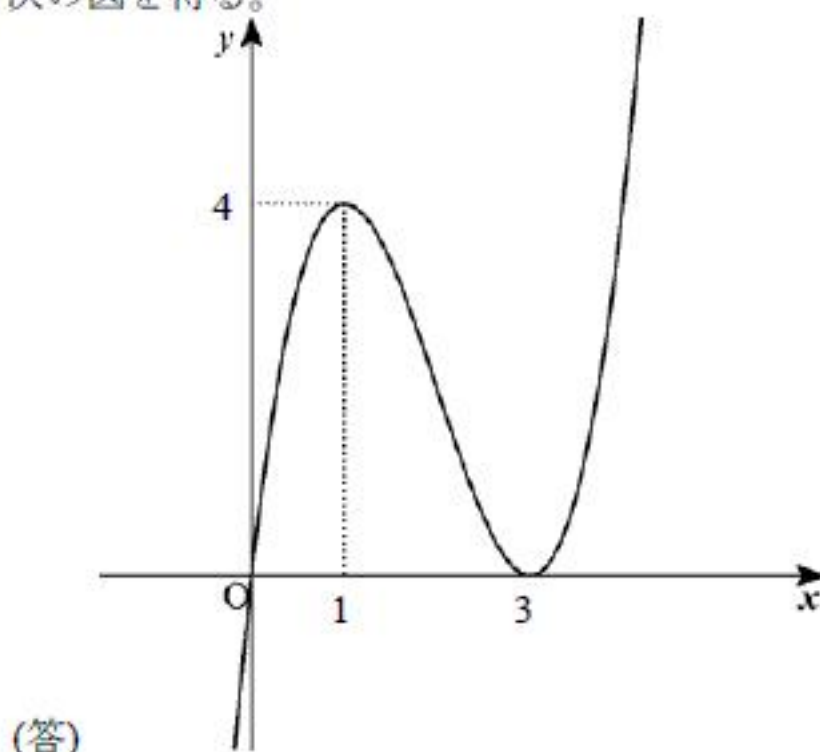
また, $f(x) = 0$ となる x は,

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x(x-3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 0, 3$$

である。以上から次の図を得る。



2.

n を整数とすると, $\theta = (2n+1)\pi$ のとき点 P は点 Q を通過する。

$$f(4) = 4$$

と上のグラフより, $0 \leq t \leq 4$ で $\theta = (2n+1)\pi$ となるのは $n=0$ のときのみであり, $0 < x < 1, 1 < x < 3, 3 < x < 4$ でそれぞれ 1 つずつあるので, 点 P が点 Q を通過する回数は 3 回である。

(答) 3 回

3.

$$f(6) = 54$$

また, $3.14 < \pi < 3.15$ なので,

$$(2n+1)\pi < 54$$

$$\therefore n \leq 8$$

したがって, $3 < x < 6$ で $\theta = (2n+1)\pi$ となるのは $n=0, 1, 2, \dots, 8$ の 9 個なので, 点 P は点 Q を 9 回通過する。 $0 < x < 1, 1 < x < 3$ でもそれぞれ 1 回ずつあるので, 合わせて 11 回通過する。

(答) 11 回

[4]

1.

$$x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 8x - 6$$

とすると,

$$3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$(3x - 7)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{7}{3}$$

また,

$$f(1) = 0, f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{16}{9}$$

であるから, 求める座標は

$$A(1, 0), B\left(\frac{7}{3}, \frac{16}{9}\right)$$

$$(\text{答}) A(1, 0), B\left(\frac{7}{3}, \frac{16}{9}\right)$$

2.

直線 l の方程式は,

$$y - 0 = \frac{\frac{16}{9} - 0}{\frac{7}{3} - 1}(x - 1)$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$$

したがって面積は,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^{\frac{7}{3}} \left\{ \left(\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \right) - (x^2 - 2x + 1) \right\} dx \\ &= -\int_1^{\frac{7}{3}} \left\{ (x - 1) \left(x - \frac{7}{3} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{7}{3} - 1 \right)^3 = \frac{32}{81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^{\frac{7}{3}} \left\{ (-2x^2 + 8x - 6) - \left(\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \right) \right\} dx \\ &= -2 \int_1^{\frac{7}{3}} \left\{ (x - 1) \left(x - \frac{7}{3} \right) \right\} dx \\ &= \frac{2}{6} \left(\frac{7}{3} - 1 \right)^3 = \frac{64}{81} \end{aligned}$$

以上より,

$$S_1 : S_2 = \frac{32}{81} : \frac{64}{81} = 1 : 2$$

$$(\text{答}) S_1 = \frac{32}{81}, S_1 : S_2 = 1 : 2$$

3.

$$f'(x) = 2x - 2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$g'(x) = -4x + 8 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

より, 点 P と点 Q の x 座標は一致している。

$$P: \left(\frac{5}{3}, f\left(\frac{5}{3}\right) \right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{9} \right)$$

$$Q: \left(\frac{5}{3}, g\left(\frac{5}{3}\right) \right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{16}{9} \right)$$

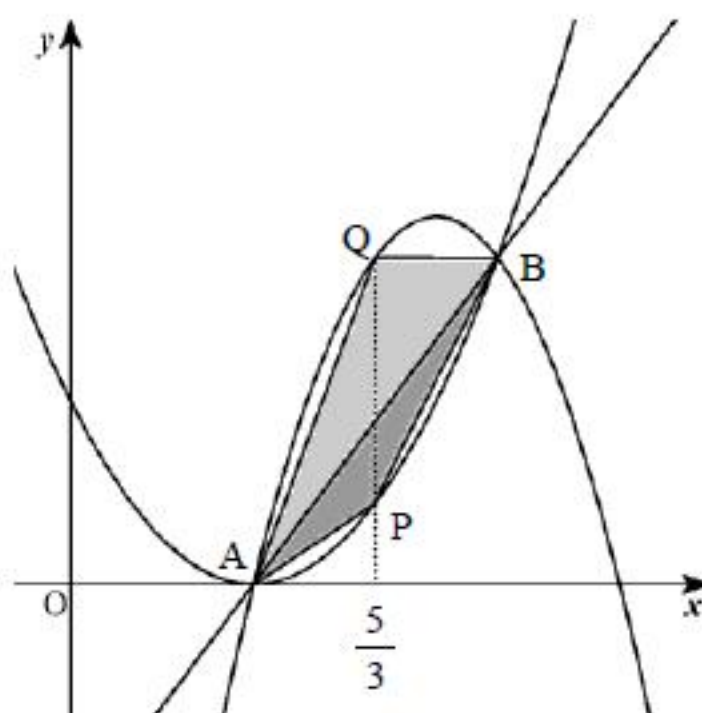
また, l 上の点で $x = \frac{5}{3}$ を満たすものは

$$y = \frac{4}{3} \times \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

以上から

$$\triangle PAB : \triangle QAB = \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{9} \right) : \left(\frac{16}{9} - \frac{8}{9} \right) = 1 : 2$$

$$(\text{答}) \triangle PAB : \triangle QAB = 1 : 2$$



[5]

1.

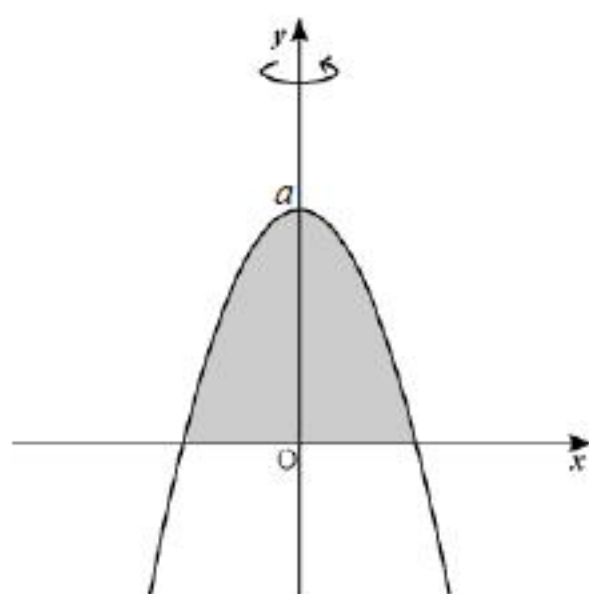
$$y = a - x^2$$

より,

$$x^2 = a - y$$

したがって右図より

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a (\pi x^2) dy \\ &= \pi \int_0^a (a - y) dy \\ &= \pi \left[ay - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$



$$(\text{答}) V_1 = \frac{\pi}{2} a^2$$

2.

$a \leq x^2$ のとき

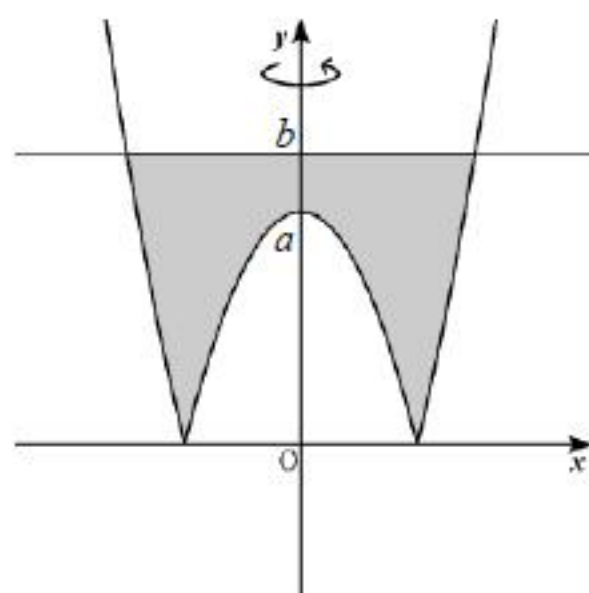
$$y = |a - x^2| = x^2 - a$$

より,

$$x^2 = a + y$$

したがって右図より

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^b (\pi x^2) dy - V_1 \\ &= \pi \int_0^b (a + y) dy - \frac{\pi}{2} a^2 \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + ay \right]_0^b - \frac{\pi}{2} a^2 \\ &= \frac{\pi}{2} b^2 + \pi ab - \frac{\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$



$$(\text{答}) V_2 = \frac{\pi}{2} b^2 + \pi ab - \frac{\pi}{2} a^2$$

3.

$$V_2 = cV_1$$

より,

$$\begin{aligned} c &= \frac{V_2}{V_1} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} b^2 + ab - \frac{\pi}{2} a^2}{\frac{\pi}{2} a^2} \\ &= \frac{b^2 + 2ab - a^2}{a^2} \\ &= \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^2 - 2 \end{aligned}$$

である。条件 $0 < a \leq b$ より

$$\frac{b}{a} \geq 1$$

であるから、実数 c の値の範囲は

$$c \geq (1+1)^2 - 2 = 2$$

$$(\text{答}) 2 \leq c$$