

(1)

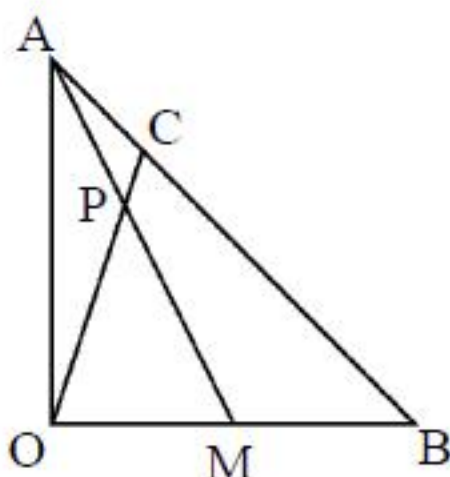
1.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{OP}{OC} \overrightarrow{OC}$$

$$= r \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{AP}{AM} \overrightarrow{AM}$$

$$= s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$



$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = r \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}, \quad \overrightarrow{AP} = s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$

2.

1. より $\overrightarrow{AP} = s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$ なので,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= \vec{a} + s \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$

$$= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b}$$

また 1. より $\overrightarrow{OP} = r \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$ とも表される。 $\vec{a}, \vec{b}$ はそれぞれ一次独立なので、それぞれの係数を比べて

$$\begin{cases} 1-s = \frac{3}{4}r \\ \frac{1}{4}r = \frac{1}{2}s \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{2}{5}, r = \frac{4}{5}$$

$$(\text{答}) \quad s = \frac{2}{5}, r = \frac{4}{5}$$

3.

$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形なので

$$\begin{cases} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 4^2 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

$$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

また,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

2. より,

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

また, $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ より,

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2} = \sqrt{10}$$

2. より $OP:PC = 4:1, AM:AP = 5:2$ なので,

$$|\overrightarrow{PC}| = \frac{1}{4} |\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{2}{5} |\overrightarrow{AM}| = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$(\text{答}) \quad PC = \frac{\sqrt{5}}{5}, AP = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

4.

$\triangle APC$ に余弦定理を用いると,

$$\begin{aligned} \cos \angle APC &= \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot PC} \\ &= \frac{\left(\frac{2\sqrt{10}}{5} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 - \left(4 \cdot \frac{1}{4} \right)^2}{2 \times \frac{2\sqrt{10}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

したがって,

$$\angle APC = \frac{\pi}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \angle APC = \frac{\pi}{4}$$

[2]

1.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$$

$$f(1) = 4$$

$$f(3) = 0$$

よって増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

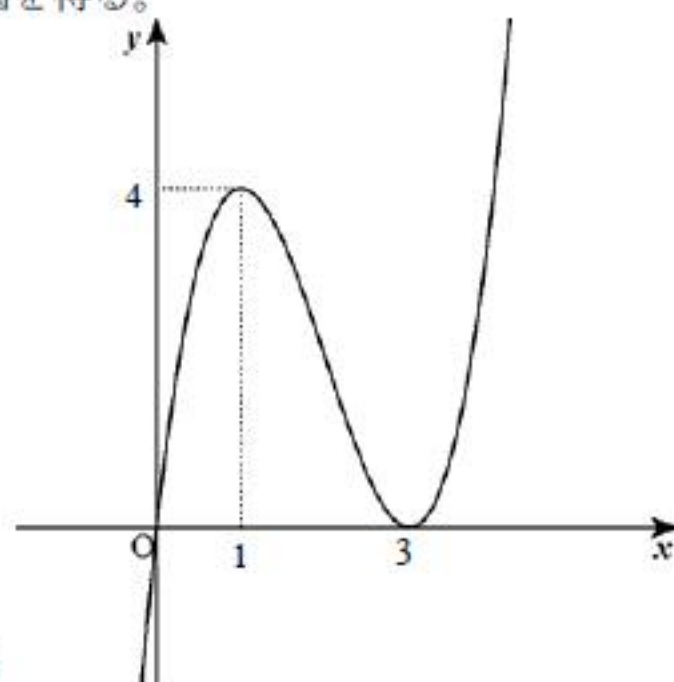
また, $f(x) = 0$ となる x は,

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x(x-3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 0, 3$$

である。以上から次の図を得る。



(答)

2.

n を整数とすると, $\theta = (2n+1)\pi$ のとき点 P は点 Q を通過する。

$$f(4) = 4$$

と上のグラフより, $0 \leq t \leq 4$ で $\theta = (2n+1)\pi$ となるのは $n=0$ のときのみであり, $0 < x < 1, 1 < x < 3, 3 < x < 4$ でそれぞれ1つずつあるので, 点 P が点 Q を通過する回数は3回である。

(答) 3回

3.

$$f(6) = 54$$

また, $3.14 < \pi < 3.15$ なので,

$$(2n+1)\pi < 54$$

$$\therefore n \leq 8$$

したがって, $3 < x < 6$ で $\theta = (2n+1)\pi$ となるのは $n=0, 1, 2, \dots, 8$ の9個なので, 点 P は点 Q を9回通過する。 $0 < x < 1, 1 < x < 3$ でもそれぞれ1回ずつあるので, 合わせて11回通過する。

(答) 11回

[3]

1.

$$y = f(x) = -x^2 + 2x$$

とおく。このグラフが x 軸と交わる点の x 座標は、

$$0 = -x^2 + 2x$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, 2$$

より、A の座標は $(2, 0)$ である。したがって直線 l_1 の方程式は

$$y - 0 = f'(2)(x - 2)$$

$$y = (-2 \times 2 + 2)(x - 2)$$

$$\therefore y = -2x + 4$$

(答) $y = -2x + 4$

2.

点 B の x 座標を t とおく。この点における接線が l_1 と直交することから、

$$f'(t) \cdot (-2) = -1$$

$$(-2t + 2) \cdot (-2) = -1$$

$$\therefore t = \frac{3}{4}$$

よって点 B の y 座標は

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{16}$$

したがって直線 l_2 の方程式は、

$$y - \frac{15}{16} = f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

$$y = \left(-2 \cdot \frac{3}{4} + 2\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{15}{16}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{16}$$

(答) $l_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{16}, B\left(\frac{3}{4}, \frac{15}{16}\right)$

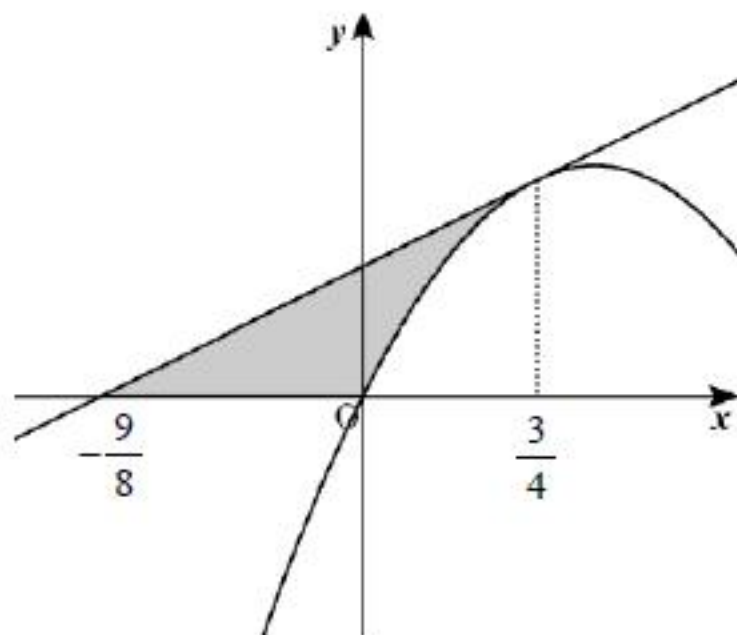
3.

直線 l_2 が x 軸と交わる点の x 座標は、

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{16}$$

$$\therefore x = -\frac{9}{8}$$

なので、求める面積は



$$\int_{-\frac{9}{8}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{16} \right) dx - \int_0^{\frac{3}{4}} (-x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16}x \right]_{-\frac{9}{8}}^{\frac{3}{4}} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{117}{256}$$

(答) $\frac{117}{256}$

[4]

1.

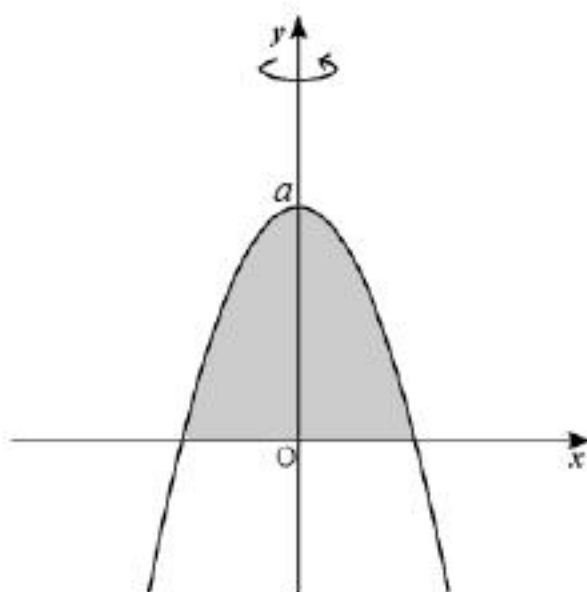
$$y = a - x^2$$

より,

$$x^2 = a - y$$

したがって右図より

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a (\pi x^2) dy \\ &= \pi \int_0^a (a - y) dx \\ &= \pi \left[ay - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$



$$(\text{答}) V_1 = \frac{\pi}{2} a^2$$

2.

$a \leq x^2$ のとき

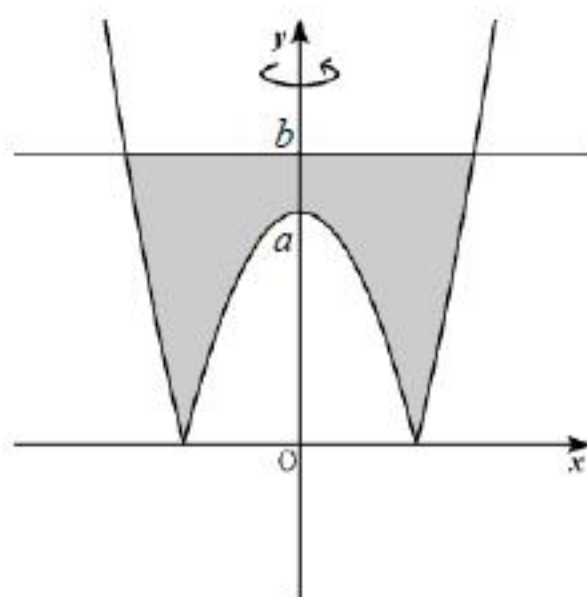
$$y = |a - x^2| = x^2 - a$$

より,

$$x^2 = a + y$$

したがって右図より

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^b (\pi x^2) dy - V_1 \\ &= \pi \int_0^b (a + y) dy - \frac{\pi}{2} a^2 \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + ay \right]_0^b - \frac{\pi}{2} a^2 \\ &= \frac{\pi}{2} b^2 + \pi ab - \frac{\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$



$$(\text{答}) V_2 = \frac{\pi}{2} b^2 + \pi ab - \frac{\pi}{2} a^2$$

3.

$$V_2 = cV_1$$

より,

$$\begin{aligned} c &= \frac{V_2}{V_1} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} b^2 + \pi ab - \frac{\pi}{2} a^2}{\frac{\pi}{2} a^2} \\ &= \frac{b^2 + 2ab - a^2}{a^2} \\ &= \left(\frac{b}{a} + 1 \right)^2 - 2 \end{aligned}$$

である。条件 $0 < a \leq b$ より

$$\frac{b}{a} \geq 1$$

であるから、実数 c の値の範囲は

$$c \geq (1+1)^2 - 2 = 2$$

$$(\text{答}) 2 \leq c$$