

〔1〕

1.

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB} + 2\overline{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overline{OC} &= -(\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB}) \quad \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow |2\overline{OC}|^2 &= |\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB}|^2 \\ \Leftrightarrow 4|\overline{OC}|^2 &= |\overline{OA}|^2 + 3|\overline{OB}|^2 + 2\sqrt{3}\overline{OA} \cdot \overline{OB} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

A, B, C は点 O を中心とする半径 1 の円の円周上にあるので,

$$|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 1$$

である。よって、これと②とから,

$$\begin{aligned}4 \cdot 1^2 &= 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2\sqrt{3}\overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= 0\end{aligned}$$

である。また、①を用いると,

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \overline{OA} \cdot \left\{ -\frac{1}{2}(\overline{OA} + \sqrt{3}\overline{OB}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2}(|\overline{OA}|^2 + \sqrt{3}\overline{OA} \cdot \overline{OB}) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \begin{cases} \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \\ \overline{OA} \cdot \overline{OC} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2.

1.の結果を用ると,

$$\begin{cases} \cos \angle AOB = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}|} = 0 \\ \cos \angle AOC = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OC}|} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

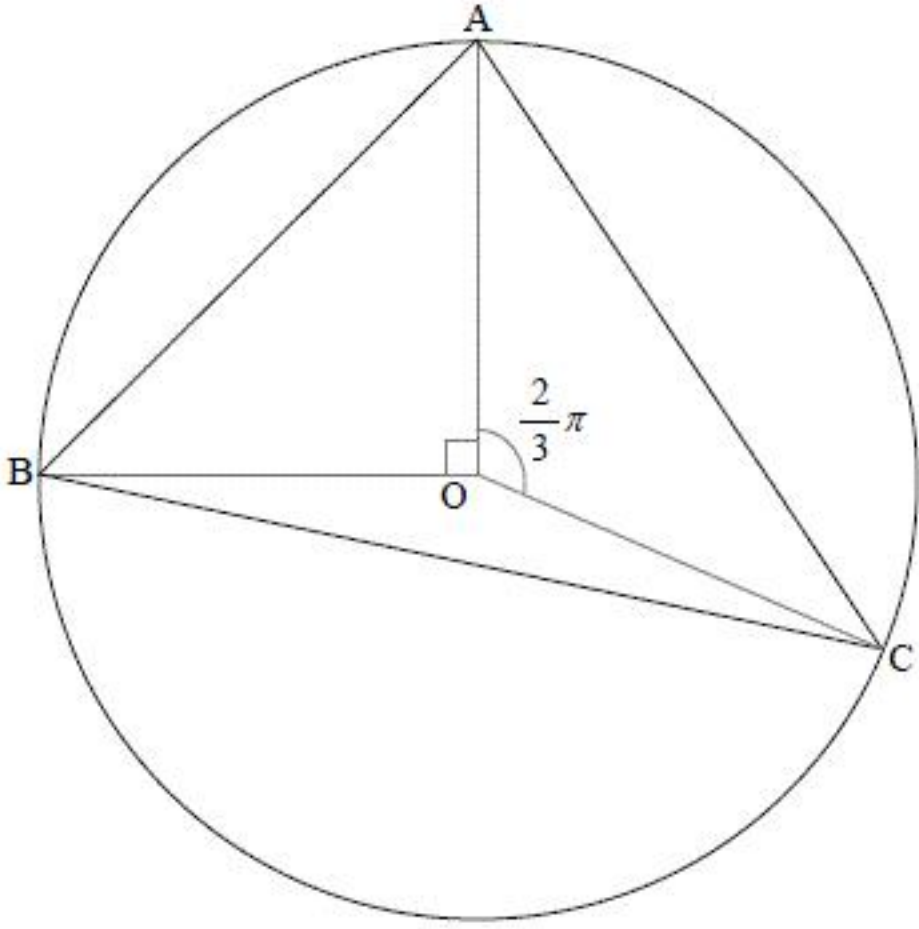
となるので、 $0 < \angle AOB < \pi$, $0 < \angle AOC < \pi$ を考慮すれば,

$$\begin{cases} \angle AOB = \frac{1}{2}\pi \\ \angle AOC = \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

である。

$$\text{(答)} \begin{cases} \angle AOB = \frac{1}{2}\pi \\ \angle AOC = \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

3.



2.の結果より,

$$\begin{aligned}\angle BOC &= 2\pi - (\angle AOB + \angle AOC) \\ &= \frac{5}{6}\pi\end{aligned}$$

である。 $\triangle ABC$ を $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COA$ の3つに分けて考えると、 $\triangle ABC$ の面積 $S_{\triangle ABC}$ は,

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB + \frac{1}{2}OA \cdot OC \cdot \sin \angle AOC + \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{5}{6}\pi \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

4.

$\triangle BOC$ について余弦定理を用いると,

$$\begin{aligned}|\overline{BC}|^2 &= |\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2 - 2|\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cos \angle BOC \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{5}{6}\pi \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{12}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

となる。頂点 A から対辺 BC に引いた垂線の足を H とおくと、 $\triangle ABC$ の面積 $S_{\triangle ABC}$ は,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH$$

と表わされる。よって、BC の長さと 3.の結果より,

$$\begin{aligned}\frac{3 + \sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \cdot AH \\ \Leftrightarrow AH &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \begin{cases} \text{辺 BC の長さ: } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \\ \text{垂線の長さ: } \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

〔2〕

1.

数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2}{7}(n-1) \\ &= \frac{2}{7}n + \frac{5}{7} \end{aligned}$$

である。また、第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{7}k + \frac{5}{7} \right) \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{5}{7}n \\ &= \frac{1}{7}n(n+6) \end{aligned}$$

である。

$$(答) \begin{cases} a_n = \frac{2}{7}n + \frac{5}{7} \\ \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{7}n(n+6) \end{cases}$$

2.

1.より

$$2 < a_7 = \frac{19}{7} < 3$$

$$4 < a_{14} = \frac{33}{7} < 5$$

$$5 \leq a_{15} = 5 < 6$$

となるので、

$$\begin{cases} b_7 = 2 \\ b_{14} = 4 \\ b_{15} = 5 \end{cases}$$

である。

$$(答) \begin{cases} b_7 = 2 \\ b_{14} = 4 \\ b_{15} = 5 \end{cases}$$

3.

まず、実数 x, y について、 $x-y=k$ (k は $k \geq 0$ を満たす整数)ならば、 $[x] - [y] = k$ であることを示す。実数 x, y について、整数 m, n ($m \geq n$)を用いて、

$$\begin{aligned} m &\leq x < m+1 \\ n &\leq y < n+1 \end{aligned}$$

が成り立つとき、

$$m-n-1 < x-y < m-n+1$$

である。 m, n は整数なので、 $x-y$ が整数ならば、

$$x-y = m-n$$

である。一方、

$$\begin{aligned} [x] &= m \\ [y] &= n \end{aligned}$$

なので、

$$[x] - [y] = m-n$$

が成り立つ。よって、上記のことが示された。

さて、

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-7} &= \left(\frac{2}{7}n + \frac{5}{7} \right) - \left\{ \frac{2}{7}(n-7) + \frac{5}{7} \right\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

であるから、今示した性質より、

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-7} &= 2 \\ \therefore b_n &= b_{n-7} + 2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 a_1 から a_7 までを求めると、

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = \left(1, \frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \frac{17}{7}, \frac{19}{7} \right)$$

であるから、 b_1 から b_7 までは、

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と②より、

$$b_{100} = b_{93} + 2 = b_{86} + 2 + 2 = \dots = b_2 + 2 \cdot 14 = 29$$

である。また、

$$\sum_{k=7n-6}^{7n} b_k = \sum_{k=1}^7 \left(b_k + 2 \times \frac{7n-7}{7} \right) = \sum_{k=1}^7 (b_k + 2n-2)$$

と表わされるので、 $\sum_{k=1}^{100} b_k$ は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} b_k &= \sum_{k=1}^7 b_k + \sum_{k=8}^{14} b_k + \dots + \sum_{k=92}^{98} b_k + \sum_{k=99}^{100} b_k \\ &= \sum_{k=1}^7 b_k + \sum_{k=1}^7 (b_k + 2) + \dots + \sum_{k=1}^7 (b_k + 26) + \sum_{k=1}^2 (b_k + 28) \\ &= \sum_{k=1}^7 b_k + \left(\sum_{k=1}^7 b_k + 2 \times 7 \right) + \dots + \left(\sum_{k=1}^7 b_k + 26 \times 7 \right) + \left(\sum_{k=1}^2 b_k + 28 \times 2 \right) \\ &= 14 \sum_{k=1}^7 b_k + 7(2+4+\dots+24+26) + \sum_{k=1}^2 b_k + 56 \\ &= 14 \sum_{k=1}^7 b_k + \sum_{k=1}^2 b_k + 1274 + 56 \\ &= 14 \sum_{k=1}^7 b_k + \sum_{k=1}^2 b_k + 1330 \end{aligned}$$

となる。②より、

$$\sum_{k=1}^7 b_k = 10, \quad \sum_{k=1}^2 b_k = 2$$

とわかるので、求める値は、

$$14 \times 10 + 2 + 1330 = 1472$$

である。

$$(答) \begin{cases} b_{100} = 29 \\ \sum_{k=1}^{100} b_k = 1472 \end{cases}$$

[3]

1.

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

であり、 ω は1ではないので、 ω は2次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解である。よって、

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

となる。

(証明終)

2.

1.より $\omega^3 = 1$, $\omega^2 = -\omega - 1$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}(a+b\omega)(a+b\omega^2) &= a^2 + ab\omega + ab\omega^2 + b^2\omega^3 \\ &= a^2 + ab\omega + ab(-\omega-1) + b^2 \\ &= a^2 - ab + b^2\end{aligned}$$

である。

(答) $a^2 - ab + b^2$

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2\omega} &= \frac{1-2\omega+4\omega^2}{(1+2\omega)(1-2\omega+4\omega^2)} \\ &= \frac{1-2\omega+4(-\omega-1)}{1+8\omega^3} \\ &= \frac{-3-6\omega}{9} \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\omega\end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\omega$

4.

$z = m + n\omega$ なので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{m+n\omega} \\ &= \frac{m^2 - mn\omega + n^2\omega^2}{(m+n\omega)(m^2 - mn\omega + n^2\omega^2)} \\ &= \frac{m^2 - mn\omega + n^2(-\omega-1)}{m^3 + n^3\omega^3} \\ &= \frac{(m^2 - n^2) - n(m+n)\omega}{m^3 + n^3}\end{aligned}$$

であるから、これと $\frac{1}{z} = p + q\omega$ を比較すれば、

$$p = \frac{m^2 - n^2}{m^3 + n^3}, \quad q = \frac{-n(m+n)}{m^3 + n^3}$$

である。ここで、 m, n は自然数なので、

$$(m^3 + n^3) - (m^2 - n^2) = m^2(m-1) + n^3 + n^2 \geq n^3 + n^2 \geq 2 > 0$$

より、 $m^2 - n^2 < m^3 + n^3$ が成り立つので、

$$\frac{m^2 - n^2}{m^3 + n^3} < 1 \Leftrightarrow p < 1$$

である。また、

$$(m^3 + n^3) + (m^2 - n^2) = m^3 + m^2 + n^2(n-1) \geq m^3 + n^2 \geq 2 > 0$$

より、 $m^2 - n^2 > -(m^3 + n^3)$ が成り立つので、

$$\frac{m^2 - n^2}{m^3 + n^3} > -1 \Leftrightarrow p > -1$$

である。したがって、

$$-1 < p < 1$$

であるが、 p は整数なので、

$$p = 0$$

である。

$$p = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 - n^2}{m^3 + n^3} = 0 \Leftrightarrow m = n$$

であるから、

$$\begin{aligned}q &= \frac{-n(m+n)}{m^3 + n^3} \\ &= \frac{-m(m+m)}{m^3 + m^3} \\ &= -\frac{1}{m}\end{aligned}$$

である。ここで、 q は整数、 m は自然数であるから、

$$q = -1, m = 1$$

である。したがって、

$$n = m = 1$$

である。以上より、

$$z = 1 + \omega$$

となる。

(答) $z = 1 + \omega$

[4]

1.

関数 $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

である。条件(i)より、

$$f(2) = 3 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(2) = 5 \Leftrightarrow 12a + 4b + c = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、条件(ii)より、

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow a + b + c + d = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。

①－③より、

$$7a + 3b + c = 2 \quad \dots \textcircled{5}$$

②－⑤より、

$$5a + b = 3 \quad \dots \textcircled{6}$$

⑤－④より、

$$4a + b = 2 \quad \dots \textcircled{7}$$

⑥、⑦より、

$$a = 1, b = -2$$

これらを④に代入して、

$$3 - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

a, b, c を③に代入して、

$$1 - 2 + 1 + d = 1 \Leftrightarrow d = 1$$

となる。このとき、実際に関数 $y = f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるかどうかについて考える。

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$$

であるから、関数 $y = f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$

増減表より、関数 $y = f(x)$ は確かに $x = 1$ で極値をとる。よって、 a, b, c, d の値は、

$$a = 1, b = -2, c = 1, d = 1$$

である。

$$(答) \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

2.

1.の増減表から、

関数 $y = f(x)$ は $x = \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{31}{27}$ 、 $x = 1$ で極小値1をとることが分かる。

$$(答) \text{ 極大値 } \frac{31}{27}, \text{ 極小値 } 1$$

〔5〕

1.

$t = \sin x + \cos x$ の両辺を 2 乗すると,

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin x + \cos x)^2 \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \\ &= 1 + 2 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= t^2 - 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2a(\sin x + \cos x)}{2 + 2 \sin x \cos x - a(\sin x + \cos x)} \\ &= \frac{2at}{2 + (t^2 - 1) - at} \\ &= \frac{2at}{t^2 - at + 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{2at}{t^2 - at + 1}$$

2.

関数 $g(t) = \frac{2at}{t^2 - at + 1}$ を t で微分すると,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{2a(t^2 - at + 1) - 2at(2t - a)}{(t^2 - at + 1)^2} \\ &= \frac{-2at^2 + 2a}{(t^2 - at + 1)^2} \\ &= \frac{-2a(t+1)(t-1)}{(t^2 - at + 1)^2} \end{aligned}$$

である。また,

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

であり,

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$$

なので,

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。よって, 関数 $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{2\sqrt{2}a}{3+\sqrt{2}a}$	$\searrow$	$-\frac{2a}{2+a}$	$\nearrow$	$\frac{2a}{2-a}$	$\searrow$	$\frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}$

ここで, $0 < a < 2$ より,

$$\begin{aligned} g(-\sqrt{2}) &= -\frac{2\sqrt{2}a}{3+\sqrt{2}a} < 0 < \frac{2a}{2-a} = g(1) \\ g(-1) &= -\frac{2a}{2+a} < 0 < \frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a} = g(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

であるから, 増減表より関数 $g(t)$ は $t=1$ のとき最大値 $\frac{2a}{2-a}$, $t=-1$ のとき最小値 $-\frac{2a}{2+a}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{2a}{2-a}, \text{ 最小値 } -\frac{2a}{2+a}$$

3.

関数 $f(x) = g(t)$ が最大値, 最小値をとるときの t の値はそれぞれ, $t=1, -1$ である。

$t=1$ のとき,

$$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ なので,

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi \\ \therefore x &= 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \end{aligned}$$

となる。また, $t=-1$ のとき,

$$t=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ なので,

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{4} &= \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \\ \therefore x &= \pi, \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

となる。よって, 関数 $f(x)$ が最大値をとるときの x の値は $x=0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ であり, 最小値をとるときの x の値は $x=\pi, \frac{3}{2}\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad x=0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \quad (\text{最大値をとるとき})$$

$$x=\pi, \frac{3}{2}\pi \quad (\text{最小値をとるとき})$$