〔1〕

1.

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

となるので,

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}\\&=\frac{1}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=\frac{1}{2}\cos\frac{180^\circ-C}{2}\cos\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{180^\circ-(A+B)}{2}\end{aligned}$$

ただし，$A+B+C=180^\circ$を用いた。さらに,

$$\begin{aligned}\cos\frac{180^\circ-C}{2}\cos\frac{C}{2}&=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=\frac{1}{2}\sin C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{180^\circ-(A+B)}{2}&=\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)\\&=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

が成り立つ。

(証明終)

2.

1.と同様にして,

$$\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}&=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\\&=-\frac{1}{2}\cos\frac{180^\circ-C}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{180^\circ-(A+B)}{2}\\&=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos C}{2}+\frac{1}{4}(\cos A+\cos B)\qquad\left(\because\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となるので,

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

が成り立つ。

(証明終)

3.

$$\begin{aligned}\tan C&=\tan\{180^\circ-(A+B)\}\\&=-\tan(A+B)\\&=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

となる。これを用いると,

$$\begin{aligned}\tan A+\tan B+\tan C&=\tan A+\tan B-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\\&=\frac{(\tan A+\tan B)(1-\tan A\tan B)-(\tan A+\tan B)}{1-\tan A\tan B}\\&=-\frac{\tan A\tan B(\tan A+\tan B)}{1-\tan A\tan B}\end{aligned}$$

となる。したがって，再び①を用いると,

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

が成り立つ。

(証明終)

〔2〕

1.

関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ を x で微分すると,

$$f'(x)=3x^2-3a^2$$

したがって, 原点における接線 ℓ_1 の方程式は,

$$y=(0-3a^2)(x-0)+0$$
$$=-3a^2x$$

である。さらに, 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ_2 の方程式は,

$$y=(3p^2-3a^2)(x-p)+p^3-3a^2p$$
$$=3(p^2-a^2)x-2p^3$$

である。

(答) $\ell_1: y=-3a^2x$

$\ell_2: y=3(p^2-a^2)x-2p^3$

2.

接線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式を連立すると,

$$-3a^2x=3(p^2-a^2)x-2p^3$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}p$$

となり, さらに,

$$y=-3a^2\cdot\frac{2}{3}p=-2a^2p$$

である。したがって, 点 Q の座標は,

$$\left(\frac{2}{3}p,\ -2a^2p\right)$$

である。

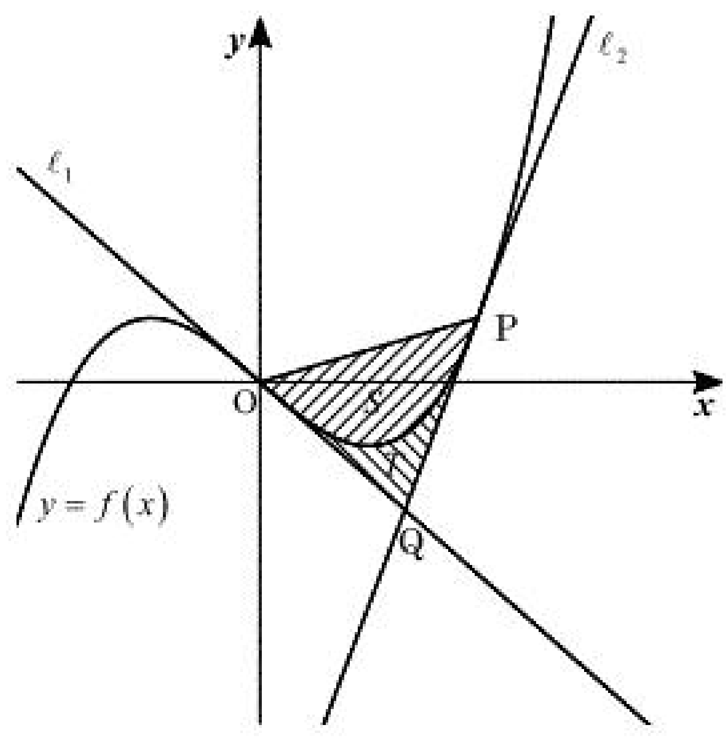
(答) $\left(\frac{2}{3}p,\ -2a^2p\right)$

3.

p の値によって場合分けする。

[1] $p>0$ のとき

グラフは次図のようになる。



点 P, Q の座標はそれぞれ $(p,\ p^3-3a^2p)$, $\left(\frac{2}{3}p,\ -2a^2p\right)$ であるので, $S+T$ は,

$$S+T=\frac{1}{2}\left|p\cdot(-2a^2p)-\frac{2}{3}p\cdot(p^3-3a^2p)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{2}{3}p^4\right|$$
$$=\frac{1}{3}p^4$$

である。一方, 直線 OP の方程式は,

$$y=\frac{f(p)}{p}x=(p^2-3a^2)x$$

であるので, S は,

$$S=\int_0^p\left\{(p^2-3a^2)x-(x^3-3a^2x)\right\}dx$$
$$=\int_0^p(-x^3+p^2x)dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{p^2}{2}x^2\right]_0^p$$
$$=\frac{1}{4}p^4$$

となる。ゆえに,

$$T=(S+T)-S$$
$$=\frac{1}{12}p^4$$

である。ゆえに,

$$S:T=\frac{1}{4}p^4:\frac{1}{12}p^4=3:1$$

であり, これは p によらず一定である。

[2] $p<0$ のとき

$p=-p'$ とおけば, $p'>0$ である。$y=f(x)$ のグラフと ℓ_1 は y 軸に関して対称なので, $p<0$ のときの S, T は[1]より,

$$S=\frac{1}{4}(p')^4$$
$$T=\frac{1}{12}(p')^4$$

である。したがって,

$$S:T=3:1$$

であり, これは p によらず一定である。

[1], [2]より, 比 $S:T$ は一定である。

(証明終)

〔3〕

1.

点Qの座標を$\left(q_x, q_y\right)$とすると，

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + 2\sin\theta \\ 2\cos\theta + \sin\theta \end{pmatrix}$$

となる。したがって，OQ^2を計算すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{OQ}^2 &= \left(\cos\theta + 2\sin\theta\right)^2 + \left(2\cos\theta + \sin\theta\right)^2 \\ &= 5\cos^2\theta + 8\cos\theta\sin\theta + 5\sin^2\theta \\ &= 5 + 8\cos\theta\sin\theta \\ &= 5 + 4\sin 2\theta \end{aligned}$$

となる。$0 < \theta < \pi$より，$0 < 2\theta < 2\pi$なので，$-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$である。よって，

$$\begin{aligned} &1 \leqq \mathrm{OQ}^2 \leqq 9 \\ &\Leftrightarrow 1 \leqq \mathrm{OQ} \leqq 3 \end{aligned}$$

であり，これが求める線分OQの取りうる値の範囲である。

(答) $1 \leqq \mathrm{OQ} \leqq 3$

2.

$\triangle\mathrm{OPQ}$の面積は，

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{OPQ} &= \frac{1}{2}\left|\cos\theta\left(2\cos\theta + \sin\theta\right) - \sin\theta\left(\cos\theta + 2\sin\theta\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\right| \\ &= \left|\cos^2\theta - \sin^2\theta\right| \\ &= \left|\cos 2\theta\right| \end{aligned}$$

である。$0 < 2\theta < 2\pi$なので，$-1 \leqq \cos 2\theta < 1 \Leftrightarrow 0 \leqq \left|\cos 2\theta\right| \leqq 1$である。よって，

$2\theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$のとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$の面積は最大値1をとる。

(答) 最大値$1\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$

3.

Pから直線OQに引いた垂線はの長さは，$\triangle\mathrm{OPQ}$についてOQを底辺としたときの高さである。したがって，垂線の足をHとおくと$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OH}$となるので，1.と2.から，

$$\mathrm{OH} = \frac{2\triangle\mathrm{OPQ}}{\mathrm{OQ}} = \frac{2\left|\cos 2\theta\right|}{\sqrt{5 + 4\sin 2\theta}}$$

となる。

(答) $\dfrac{2\left|\cos 2\theta\right|}{\sqrt{5 + 4\sin 2\theta}}$

4.

変換fによって点が常に同一直線上の点に移されるような直線が存在すれば，点$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_n, \ldots$が1直線上にあるための必要十分条件は，その直線上にP_1が存在することである。そこで，ある直線$y = ax + b$上の点$\left(t, at + b\right)$のfによる変換を考えると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2a+1)t + 2b \\ (a+2)t + b \end{pmatrix}$$

となるが，この点$\left((2a+1)t + 2b, (a+2)t + b\right)$が直線$y = ax + b$上に存在するとき，

$$\begin{aligned} &(a+2)t + b = a\left\{(2a+1)t + 2b\right\} + b \\ &\Leftrightarrow \left(2a^2 - 2\right)t + 2ab = 0 \end{aligned}$$

となる。これがtの恒等式になればよいので，

$$\begin{cases} 2a^2 - 2 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

である。したがって，点P_1が直線$y = x$上か直線$y = -x$上のいずれかにあればよい，つまり，

$$\sin\theta = \cos\theta \qquad \cdots ①$$
$$\sin\theta = -\cos\theta \qquad \cdots ②$$

のいずれかが成り立てばよい。①が成り立つとき，

$$\begin{aligned} &\sin\theta = \cos\theta \\ &\Leftrightarrow \cos\theta - \sin\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4} < \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{5}{4}\pi$なので，

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

である。一方，②が成り立つとき，

$$\begin{aligned} &\sin\theta = -\cos\theta \\ &\Leftrightarrow \sin\theta + \cos\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

よって，

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi$$

である。以上から，求めるθの値は，

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

である。

(答) $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi$