

[1]

1.

外接円の中心から各辺に下ろした垂線の足は、その辺を二分するので、

$$\begin{cases} \overline{OL} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \\ \overline{OM} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) \\ \overline{ON} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また条件より、

$$\sqrt{3}\overline{OL} + \overline{OM} + (2 + \sqrt{3})\overline{ON} = \vec{0}$$

である。この式に①を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1)\vec{a} + (\sqrt{3} + 1)\vec{b} + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)\vec{c} &= \vec{0} \\ \therefore \vec{c} &= -\sqrt{3}\vec{a} - 2\vec{b} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\vec{c} = -\sqrt{3}\vec{a} - 2\vec{b}$

2.

②の両辺を2乗して、

$$|\vec{c}|^2 = 3|\vec{a}|^2 + 4\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。条件より、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow 1 = 3 + 4\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.

2.より、

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、 $0 < \angle AOB < \pi$ より、

$$\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$$

となる。したがって、

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{5}{12}\pi$$

と求まる。

(答) $\begin{cases} \angle AOB = \frac{5}{6}\pi \\ \angle ACB = \frac{5}{12}\pi \end{cases}$

4.

まず2と同様に考えて、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求める。

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}\vec{a} = -2\vec{b} - \vec{c}$$

であるから、この式の両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} 3|\vec{a}|^2 &= 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 3 &= 4 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 1 \\ \therefore \vec{b} \cdot \vec{c} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 2\vec{b} = -\sqrt{3}\vec{a} - \vec{c}$$

であるから、両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} 4|\vec{b}|^2 &= 3|\vec{a}|^2 + 2\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 4 &= 3 + 2\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + 1 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} + \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} + \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2}$$

であるから、この式に、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 0} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{4}(3 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{4}(3 + \sqrt{3})$

[2]

1.

$S_n + na_n = 1$ について $n=1$ とすると, $S_1 = a_1$ より,

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 &= 1 \\ \therefore a_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。また, 同様に,

$$\begin{aligned} S_2 + 2a_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + 2a_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3a_2 &= 1 - a_1 \\ \therefore a_2 &= \frac{1}{6} \\ S_3 + 3a_3 &= 1 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + 3a_3 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4a_3 &= 1 - a_1 - a_2 \\ \therefore a_3 &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{12}$$

2.

$$\begin{aligned} S_n + na_n &= 1 \\ \Leftrightarrow a_n + S_{n-1} + na_n &= 1 \\ \Leftrightarrow S_{n-1} + (n+1)a_n &= 1 \\ \Leftrightarrow (n+1)a_n &= 1 - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} S_{n-1} + (n-1)a_{n-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow (n-1)a_{n-1} &= 1 - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから, ①, ②より,

$$\begin{aligned} (n+1)a_n &= (n-1)a_{n-1} \\ \Leftrightarrow (n+1)na_n &= n(n-1)a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

となる。ここで, $(n+1)na_n = b_n \quad (n \geq 1)$ とおくと,

$$b_n = b_{n-1} = \dots = b_1 = 2 \cdot 1 \cdot a_1 = 1$$

となるので,

$$\begin{aligned} (n+1)na_n &= 1 \\ \therefore a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

と求まる。したがって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)}, S_n = \frac{n}{n+1}$$

[3]

1.

A と B が一致すると仮定すると、

$$\begin{aligned} t^2 &= t-2 \\ \Leftrightarrow t^2-t+2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式の判別式を D とすると、

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$$

となるので、実数解を持たない。したがって、

$$t^2 \neq t-2$$

である。よって矛盾する。ゆえに、

$$A \neq B$$

となる。

(証明終)

2.

1.より、A, B, C は全て異なる点である。

[1] $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$t^2 - t - 1 = t - 2$$

となればよいから、

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2 &= 0 \\ \therefore t &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

[2] $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\text{直線 BC の傾き} : \frac{t^2 - 2t + 1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{直線 AC の傾き} : \frac{-t-1}{\sqrt{3}}$$

である。したがって、 $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ となる条件は、

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-t-1}{\sqrt{3}} = -1$$

である。この式を変形すると、

$$\begin{aligned} (t^2 - 2t + 1)(t+1) &= 3 \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - t + 1 &= 3 \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - t - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + t + 1) &= 0 \\ \therefore t &= 2 \end{aligned}$$

と求まる。

[3] $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$t^2 = t^2 - t - 1$$

となればよいので、

$$t = -1$$

と求まる。

[1]~[3]より、 $\triangle ABC$ が直角三角形となる t は、

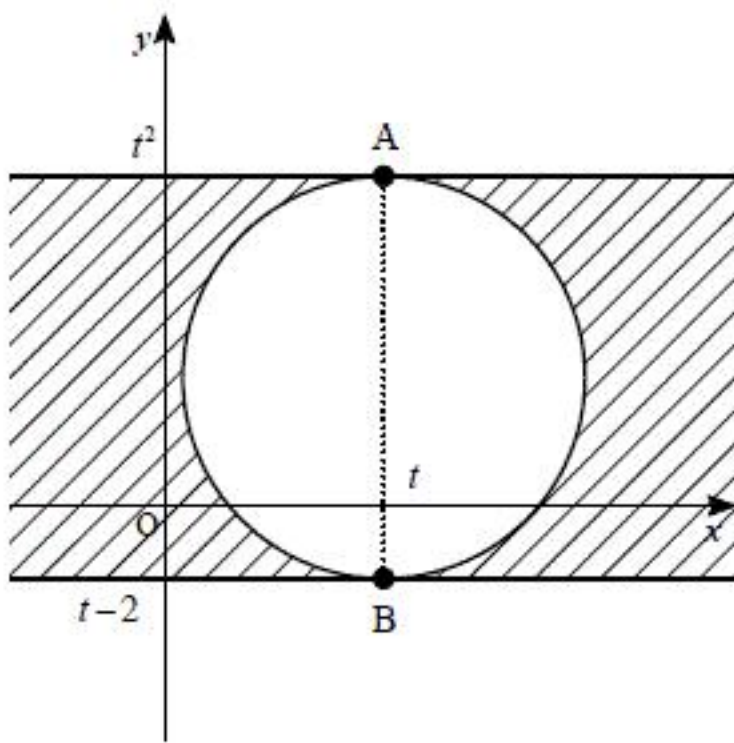
$$t = -1, 1, 2$$

である。

(答) $t = -1, 1, 2$

3.

$\triangle ABC$ が鋭角三角形となるとき、点 C は下図の斜線部に存在する。



AB を直径とする円の方程式は、

$$(x-t)^2 + \left(y - \frac{t^2+t-2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2$$

であるから、点 C が上図の斜線部に存在する条件は、

$$t-2 < t^2 - t - 1 < t^2$$

かつ

$$(t + \sqrt{3} - t)^2 + \left(t^2 - t - 1 - \frac{t^2+t-2}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2$$

である。

$$\begin{aligned} t-2 &< t^2 - t - 1 < t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 &> 0, \quad t > -1 \\ \Leftrightarrow -1 &< t < 1, \quad 1 < t \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} (t + \sqrt{3} - t)^2 + \left(t^2 - t - 1 - \frac{t^2+t-2}{2}\right)^2 &> \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2 \\ \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t\right)^2 &> \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2 \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - t - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + t + 1) &< 0 \\ \Leftrightarrow t &< 2 \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形となる t の範囲は、

$$-1 < t < 1, \quad 1 < t < 2$$

と求まる。

(答) $-1 < t < 1, 1 < t < 2$

[4]

1.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \{ (3ap^2 + 2bp + c) + (3aq^2 + 2bq + c) \} \\ &= \frac{3}{2} a(p^2 + q^2) + b(p + q) + c \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \frac{3}{2} a(p^2 + q^2) + b(p + q) + c$$

2.

$$\begin{aligned} B &= 3a \left(\frac{p+q}{2} \right)^2 + 2b \left(\frac{p+q}{2} \right) + c \\ &= \frac{3}{4} a(p+q)^2 + b(p+q) + c \\ C &= \frac{1}{p-q} \{ a(p^3 - q^3) + b(p^2 - q^2) + c(p - q) \} \\ &= a(p^2 + pq + q^2) + b(p+q) + c \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} A - C &= \frac{3}{2} a(p^2 + q^2) - a(p^2 + pq + q^2) \\ &= \frac{1}{2} ap^2 - apq + \frac{1}{2} aq^2 \\ &= \frac{1}{2} a(p - q)^2 \\ &> 0 \quad (\because p \neq q, a > 0) \\ B - C &= \frac{3}{4} a(p^2 + 2pq + q^2) - a(p^2 + pq + q^2) \\ &= -\frac{1}{4} ap^2 + \frac{1}{2} apq - \frac{1}{4} aq^2 \\ &= -\frac{1}{4} a(p - q)^2 \\ &< 0 \quad (\because p \neq q, a > 0) \end{aligned}$$

となる。ゆえに,

$$B < C < A$$

である。

$$(\text{答}) \quad B < C < A$$