

〔1〕

1.

題意より、

$$C_1: y = x^2$$

$$C_2: y = -3x^2 + 2px + q$$

の2式から y を消去して得られる2次方程式

$$4x^2 - 2px - q = 0$$

の2解が α, β ($\alpha < \beta$) であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}p, \alpha\beta = -\frac{1}{4}q \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-3x^2 + 2px + q) - x^2\} dx \\ &= -4 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{4}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{2}{3} \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}p^2 + q \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 C_2 が点 $P(a, b)$ を通ることから、

$$b = -3a^2 + 2pa + q \Leftrightarrow q = 3a^2 - 2pa + b \quad \dots \textcircled{2}$$

となるので、これを代入して、

$$S = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}p^2 - 2ap + 3a^2 + b \right)^{\frac{3}{2}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}p^2 - 2ap + 3a^2 + b \right)^{\frac{3}{2}}$$

2.

1.の結果において、

$$\frac{1}{4}p^2 - 2ap + 3a^2 + b = \frac{1}{4}(p - 4a)^2 + b - a^2$$

は $p = 4a$ のとき、最小値 $b - a^2$ をとる。したがって、 $b > a^2$ に注意すると、 S を最小にする p

は $p = 4a$ で、そのとき $S = \frac{2}{3}(b - a^2)^{\frac{3}{2}}$ となる。

$$(\text{答}) \quad p = 4a \text{ のとき、最小値 } \frac{2}{3}(b - a^2)^{\frac{3}{2}}$$

3.

$p = 4a$ とすると、 $\textcircled{2}$ より、 $q = -5a^2 + b$ である。よって、 $\textcircled{1}$ より、 AB の中点 M の座標を $M(X, Y)$ として、

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= \frac{1}{4}p \\ &= a, \\ Y &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}q \right) \\ &= \frac{3a^2 + b}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、線分 PM は y 軸に平行であり、その長さは、

$$PM = \left| b - \frac{3a^2 + b}{4} \right| = \frac{3}{4}(b - a^2) \quad (\because a^2 < b)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad PM = \frac{3}{4}(b - a^2)$$

4.

C_2 について、 $y' = -6x + 2p$ であるから、2.のもとで、点 P における接線 ℓ の傾きは、

$$y'|_{x=a} = -6a + 2 \cdot 4a = 2a$$

となる。一方、直線 AB の傾きは、2点の x, y 座標の差を考えて、

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \alpha + \beta = \frac{1}{2}p = 2a$$

となる。したがって、両者の傾きが等しいことが示された。

(証明終)

〔2〕

1.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5x_{n-1} + 3y_{n-1} \\ 3x_{n-1} + 5y_{n-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{5}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1} \\ \Leftrightarrow y_{n-1} &= \frac{4}{3}x_n - \frac{5}{3}x_{n-1}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}y_n &= \frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{5}{4}y_{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}x_{n+1} - \frac{5}{4}x_n &= \frac{4}{3}x_{n-1} + \frac{5}{4}\left(\frac{4}{3}x_n - \frac{5}{3}x_{n-1}\right) \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= \frac{5}{2}x_{n+1} - x_n \quad (n \geq 1) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。①は次の2通りに変形できる。

$$\begin{aligned}x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} &= 2\left(x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n\right) \quad \dots \textcircled{2} \\ x_{n+2} - 2x_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_{n+1} - 2x_n) \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

であるから、②について,

$$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 2^{n-1}\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1\right) = \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

となり、また、③について,

$$x_{n+1} - 2x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_2 - 2x_1) = -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。④と⑤から,

$$x_n = 2^{n-2} + \frac{1}{2^n}$$

である。また,

$$\begin{aligned}y_n &= \frac{4}{3}x_{n+1} - \frac{5}{3}x_n \\ &= \frac{4}{3}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \frac{5}{3}\left(2^{n-2} + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 2^{n-2} - \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

となる。このとき、すべての n に対し、

$$x_n^2 - y_n^2 = 1$$

が成り立ち、すべての P_n は、2点 F, F' を焦点にもつ双曲線である $x^2 - y^2 = 1$ の上にあることがわかる。したがって、双曲線の定義から、 P_nF と P_nF' の距離の差は2である。

(答) 2 ($n=1, 2, \dots$)

2.

1.での議論から、求める曲線 C は

$$x^2 - y^2 = 1$$

となる。

(答) $C: x^2 - y^2 = 1$

〔3〕

1.

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \sin x dx \\ &= \int (-e^{-x})' \sin x dx \\ &= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \\ &= -e^{-x} \sin x + J \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} J &= \int e^{-x} \cos x dx \\ &= \int (-e^{-x})' \cos x dx \\ &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx \\ &= -e^{-x} \cos x - I \end{aligned}$$

となるので, 2 式の和を考えて,

$$\begin{aligned} I &= -e^{-x} (\sin x + \cos x) - I \\ \therefore I &= -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad I = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

2.

$2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ において, $\sin x \geq 0$ であるから, 曲線 C は

$$y = e^{-x} \sin x$$

となる。したがって, 求める面積は 1. の結果を用いると,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} e^{-(2n+1)\pi} + \frac{1}{2} e^{-2n\pi} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} e^{-2n\pi} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_{2n} = \frac{1+e^{-\pi}}{2} e^{-2n\pi}$$

3.

$t = x + \pi$ とおくと, $dt = dx$ であり, また区間は

x	$(2n+1)\pi$	$\rightarrow$	$2(n+1)\pi$
t	$2n\pi$	$\rightarrow$	$(2n+1)\pi$

と変化するので,

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\ &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-t-\pi} |\sin(t+\pi)| dt \\ &= e^{-\pi} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-t} |\sin t| dt \\ &= e^{-\pi} S_{2n} \end{aligned}$$

となり, 2. の結果から,

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2} e^{-(2n+1)\pi}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_{2n+1} = \frac{1+e^{-\pi}}{2} e^{-(2n+1)\pi}$$

4.

2. と 3. より, n の偶奇にかかわらず,

$$S_n = \frac{1+e^{-\pi}}{2} e^{-n\pi}$$

となることがわかる。よって, $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ は初項 $\frac{1+e^{-\pi}}{2}$, 公比 $e^{-\pi}$ の無限等比級数である。そして

$0 < e^{-\pi} < 1$ であるから, この無限級数は収束し, その和は

$$\frac{1+e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} S_k = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$