

【1】

1.

外接円の中心から各辺に下ろした垂線の足は、その辺を二分するので、

$$\begin{cases} \overline{OL} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \\ \overline{OM} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) \\ \overline{ON} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また条件より、

$$\sqrt{3}\overline{OL} + \overline{OM} + (2 + \sqrt{3})\overline{ON} = \vec{0}$$

である。この式に①を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1)\vec{a} + (\sqrt{3} + 1)\vec{b} + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)\vec{c} &= \vec{0} \\ \therefore \vec{c} &= -\sqrt{3}\vec{a} - 2\vec{b} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\vec{c} = -\sqrt{3}\vec{a} - 2\vec{b}$

2.

②の両辺を2乗して、

$$|\vec{c}|^2 = 3|\vec{a}|^2 + 4\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。条件より、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow 1 = 3 + 4\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.

2.より、

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、 $0 < \angle AOB < \pi$ より、

$$\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$$

となる。したがって、円周角と中心角の関係から、

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{5}{12}\pi$$

と求まる。

(答) $\begin{cases} \angle AOB = \frac{5}{6}\pi \\ \angle ACB = \frac{5}{12}\pi \end{cases}$

4.

まず2と同様に考えて、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求める。

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}\vec{a} = -2\vec{b} - \vec{c}$$

であるから、この式の両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} 3|\vec{a}|^2 &= 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 3 &= 4 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 1 \\ \therefore \vec{b} \cdot \vec{c} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 2\vec{b} = -\sqrt{3}\vec{a} - \vec{c}$$

であるから、両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} 4|\vec{b}|^2 &= 3|\vec{a}|^2 + 2\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 4 &= 3 + 2\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + 1 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} + \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} + \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2}$$

であるから、この式に、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 0} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{4}(3 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{4}(3 + \sqrt{3})$

[2]

1.

$S_n + na_n = 1$ について $n=1$ とすると, $S_1 = a_1$ より,

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 &= 1 \\ \therefore a_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。また, 同様に,

$$\begin{aligned} S_2 + 2a_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + 2a_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3a_2 &= 1 - a_1 \\ \therefore a_2 &= \frac{1}{6} \\ S_3 + 3a_3 &= 1 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + 3a_3 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4a_3 &= 1 - a_1 - a_2 \\ \therefore a_3 &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{12}$$

2.

$$\begin{aligned} S_n + na_n &= 1 \\ \Leftrightarrow a_n + S_{n-1} + na_n &= 1 \\ \Leftrightarrow S_{n-1} + (n+1)a_n &= 1 \\ \Leftrightarrow (n+1)a_n &= 1 - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} S_{n-1} + (n-1)a_{n-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow (n-1)a_{n-1} &= 1 - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから, ①, ②より,

$$\begin{aligned} (n+1)a_n &= (n-1)a_{n-1} \\ \Leftrightarrow (n+1)na_n &= n(n-1)a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

となる。ここで, $(n+1)na_n = b_n (n \geq 1)$ とおくと,

$$b_n = b_{n-1} = \dots = b_1 = 2 \cdot 1 \cdot a_1 = 1$$

となるので,

$$\begin{aligned} (n+1)na_n &= 1 \\ \therefore a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

と求まる。したがって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)}, S_n = \frac{n}{n+1}$$

[3]

1.

AとBが一致すると仮定すると、

$$\begin{aligned} t^2 &= t-2 \\ \Leftrightarrow t^2-t+2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式の判別式を D とすると、

$$D=1^2-4\cdot 1\cdot 2=-7<0$$

となるので、実数解を持たない。したがって、

$$t^2 \neq t-2$$

である。よって矛盾する。ゆえに、

$$A \neq B$$

となる。

(証明終)

2.

1より、A, B, Cは全て異なる点である。

[1] $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$t^2-t-1=t-2$$

となればよいから、

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow t^2-2t+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2 &= 0 \\ \therefore t &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

[2] $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \text{直線 BC の傾き} &: \frac{t^2-2t+1}{\sqrt{3}} \\ \text{直線 AC の傾き} &: \frac{-t-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。したがって、 $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ となる条件は、

$$\frac{t^2-2t+1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-t-1}{\sqrt{3}} = -1$$

である。この式を変形すると、

$$\begin{aligned} (t^2-2t+1)(t+1) &= 3 \\ \Leftrightarrow t^3-t^2-t+1 &= 3 \\ \Leftrightarrow t^3-t^2-t-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+1) &= 0 \\ \therefore t &= 2 \end{aligned}$$

と求まる。

[3] $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$t^2=t^2-t-1$$

となればよいので、

$$t=-1$$

と求まる。

[1]~[3]より、 $\triangle ABC$ が直角三角形となる t は、

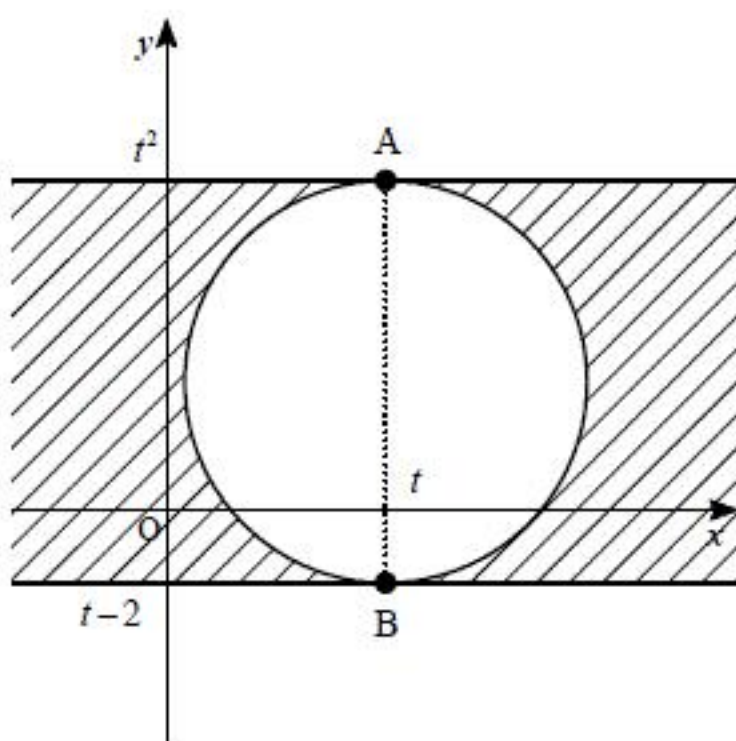
$$t=-1, 1, 2$$

である。

(答) $t=-1, 1, 2$

3.

$\triangle ABC$ が鋭角三角形となるとき、点Cは下図の斜線部に存在する。



ABを直径とする円の方程式は、

$$(x-t)^2 + \left(y - \frac{t^2+t-2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2$$

であるから、点Cが上図の斜線部に存在する条件は、

$$t-2 < t^2-t-1 < t^2$$

かつ

$$(t+\sqrt{3}-t)^2 + \left(t^2-t-1 - \frac{t^2+t-2}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2$$

である。

$$\begin{aligned} t-2 &< t^2-t-1 < t^2 \\ \Leftrightarrow t^2-2t+1 &> 0, \quad t > -1 \\ \Leftrightarrow -1 &< t < 1, \quad 1 < t \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} (t+\sqrt{3}-t)^2 + \left(t^2-t-1 - \frac{t^2+t-2}{2}\right)^2 &> \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2 \\ \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t\right)^2 &> \frac{1}{4}(t^2-t+2)^2 \\ \Leftrightarrow t^3-t^2-t-2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+1) &< 0 \\ \Leftrightarrow t &< 2 \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形となる t の範囲は、

$$-1 < t < 1, \quad 1 < t < 2$$

と求まる。

(答) $-1 < t < 1, \quad 1 < t < 2$

[4]

1.

与えられた方程式を連立させると,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 - x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$, $x \geq 0$ より,

$$0 \leq x \leq a$$

であることに注意して, ①の両辺を2乗すると,

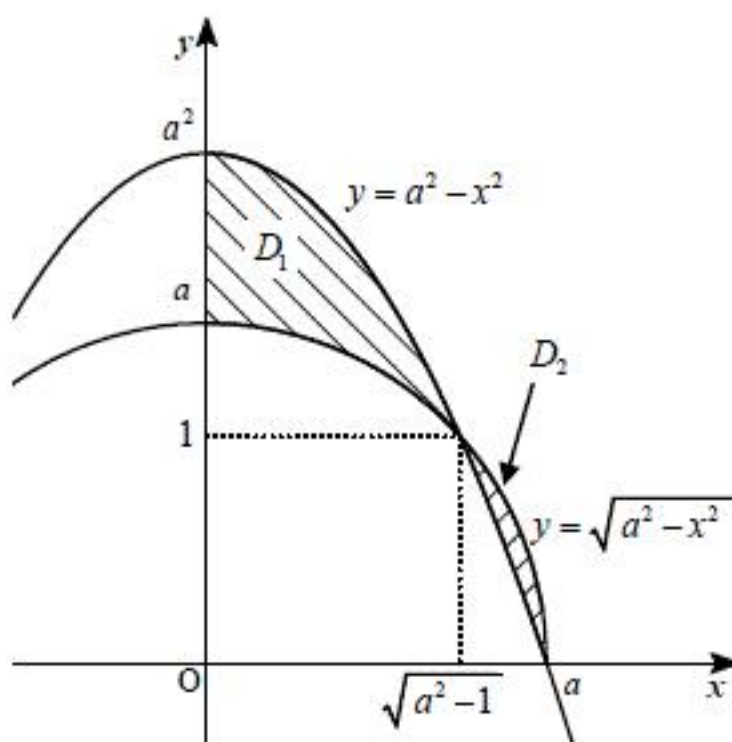
$$\begin{aligned} a^2 - x^2 &= (a^2 - x^2)^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 - x^2)(a^2 - x^2 - 1) &= 0 \\ \therefore x &= \sqrt{a^2 - 1}, a \end{aligned}$$

と求まる。また, それぞれに対応する y 座標は, 1, 0 である。よって, 求める交点は,

$$(\sqrt{a^2 - 1}, 1), (a, 0) \text{ である。}$$

$$(\text{答}) (\sqrt{a^2 - 1}, 1), (a, 0)$$

2.



1.より, $y = a^2 - x^2$ と $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ の概形は前図のようになり, D_1, D_2 はそれぞれ前図の斜線部である。

(答) 前図参照

3.

2.の図より,

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\sqrt{a^2 - 1}} \left\{ (a^2 - x^2)^2 - \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right\} dx \\ V_2 &= \pi \int_{\sqrt{a^2 - 1}}^a \left\{ \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - (a^2 - x^2)^2 \right\} dx \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \pi \int_0^{\sqrt{a^2 - 1}} \left\{ (a^2 - x^2)^2 - \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right\} dx - \pi \int_{\sqrt{a^2 - 1}}^a \left\{ \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - (a^2 - x^2)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^a \left\{ (a^2 - x^2)^2 - \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^a \left\{ x^4 + (-2a^2 + 1)x^2 + (a^4 - a^2) \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}(-2a^2 + 1)x^3 + (a^4 - a^2)x \right]_0^a \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{3}(-2a^2 + 1)a^3 + (a^4 - a^2)a \right\} \\ &= \frac{2}{15}\pi a^3(4a^2 - 5) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{2}{15}\pi a^3(4a^2 - 5)$$

4.

3.よりさらに, $V_1 - V_2 = \frac{8}{15}\pi a^2 \left(a + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left(a - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$ と変形できる。よって, $V_1 < V_2$ を満たす a の範囲は, $a > 1$ に注意して,

$$1 < a < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) 1 < a < \frac{\sqrt{5}}{2}$$