

(1)

1.

まず,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OE}}{5} \\ \overrightarrow{OD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{b} \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OE} &= 5\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{a} \\ &= 3\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a} \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

2.

k, m をそれぞれ実数とすると $\overrightarrow{OF}$ は

$$\begin{cases} \overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OE} = -\frac{2k}{3}\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{b} + m\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b} + m\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \frac{m}{3}\overrightarrow{a} + (1-m)\overrightarrow{b} \end{cases}$$

の2通りで表せるので, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が1次独立であることに注意して係数を比較すると

$$\begin{cases} \frac{m}{3} = -\frac{2k}{3} \cdots \textcircled{1} \\ k = (1-m) \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。①より,

$$\begin{aligned} \frac{m}{3} &= -\frac{2k}{3} \\ \Leftrightarrow m &= -2k \end{aligned}$$

となるので, これを②に代入すると

$$\begin{aligned} k &= (1+2k) \\ \Leftrightarrow k &= -1 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

3.

2.より $m=2$ であるから,

$$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$$

である。よって,

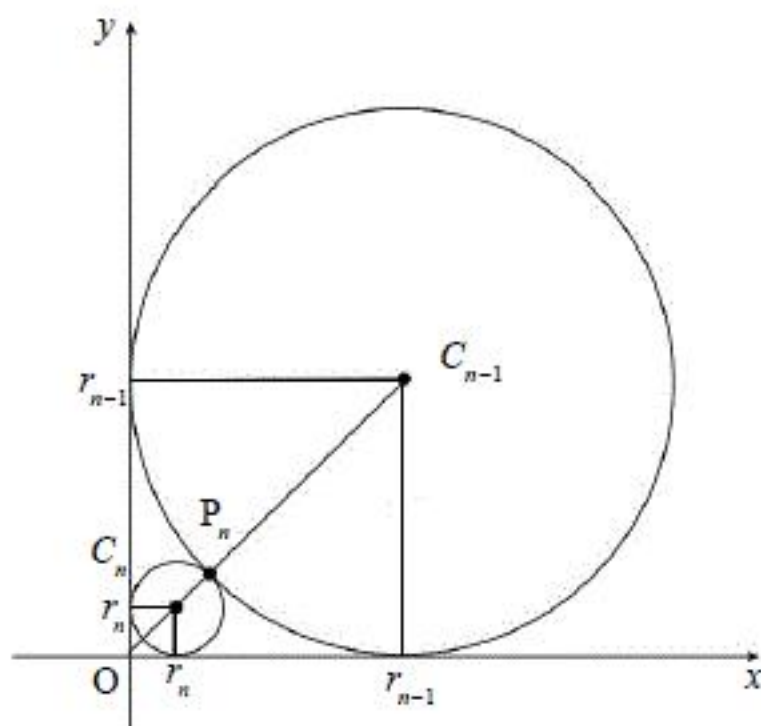
$$FC:CB=1:1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad FC:CB=1:1$$

[2]

1.



円 C_n の中心は (r_n, r_n) なので、上図のような幾何学的関係より、

$$\begin{aligned} OP_n &= \sqrt{2}r_n + r_n \\ &= (1 + \sqrt{2})r_n \end{aligned}$$

となる。

(答) $OP_n = (1 + \sqrt{2})r_n$

2.

円 C_n と C_{n-1} の中心間の距離は

$$\begin{aligned} &\sqrt{(r_{n-1} - r_n)^2 + (r_{n-1} - r_n)^2} = r_{n-1} + r_n \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}(r_{n-1} - r_n) = r_{n-1} + r_n \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)r_n = (\sqrt{2} - 1)r_{n-1} \\ &\Leftrightarrow r_n = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}r_{n-1} \end{aligned}$$

となるので、数列 $\{r_n\}$ は公比 $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$ の等比数列となる。

(証明終)

3.

2.より

$$\begin{aligned} r_n &= \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^{n-1} r_1 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

であるので、円 C_6 の式は

$$\left\{ x - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 \right\}^2 + \left\{ y - \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 \right\}^2 = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^{10} \cdots \textcircled{1}$$

となる。題意を示すには

$$(\text{円 } C_6 \text{ の中心と原点の距離}) + r_6 < \frac{1}{1000}$$

を示せばよい。①より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1000} - \left\{ \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 + \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 \right\} \\ &= \frac{1}{1000} - (\sqrt{2} + 1)(3 - 2\sqrt{2})^5 \\ &> \frac{1}{1000} - 2.42 \times (0.18)^5 \quad (\because 1.41 < \sqrt{2} < 1.42) \\ &= 0.001 - 0.000457 \cdots \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、題意は示せた。

(証明終)

[3]

1.

直線 ℓ と C の式を連立すると

$$\begin{aligned} ax &= x(x-a) \\ \Leftrightarrow x(x-2a) &= 0 \end{aligned}$$

となるが、今原点とは異なる座標を求めるので、 $x \neq 0$ より

$$x = 2a$$

となる。よって、求める座標は $(2a, 2a^2)$ である。

(答) $(2a, 2a^2)$

2.

C と x 軸との交点は

$$x = 0, a$$

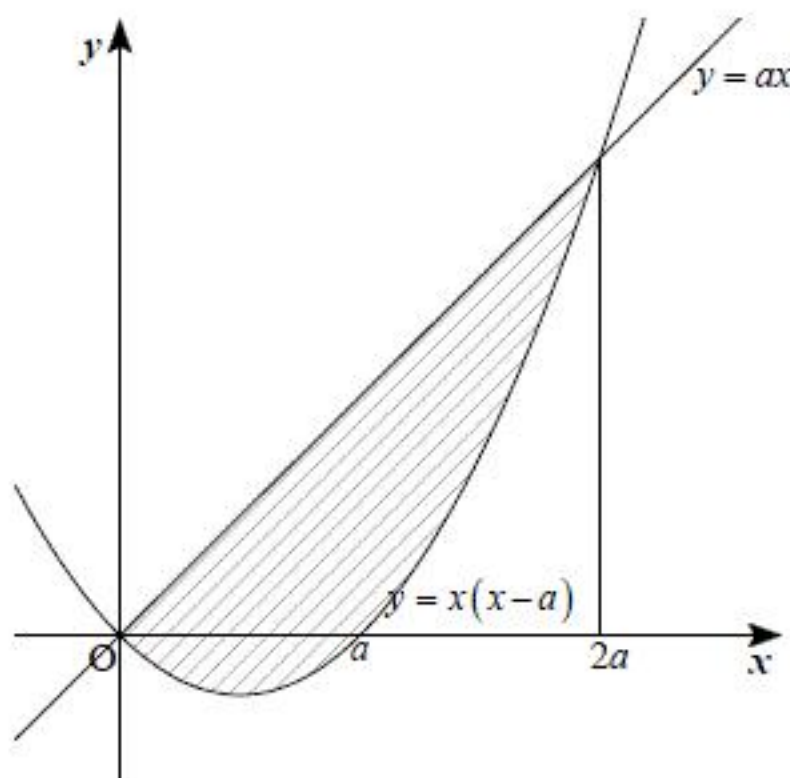
であるので、求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_0^a \{0 - x(x-a)\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a^3}{6}$

3.



求める面積は上図の斜線部（図形 D ）なので面積公式の $-\int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を使くと

$$\begin{aligned} &\int_0^{2a} \{ax - x(x-a)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(2a)^3 \\ &= \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}a^3$

4.

k を実数とし、点 $(a, 0)$, (k, ka) をそれぞれ A , B とすると 2. と 3. の結果より $\triangle OAB$ の面積が

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{1}{2}a^3$$

となればよい。

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot ka$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot a \cdot ka &= \frac{1}{2}a^3 \\ \Leftrightarrow k &= a \end{aligned}$$

となる。よって直線 AB の方程式は

$$x = a$$

である。

(答) $x = a$

[4]

1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^3 - 6ax^2 + 9ax + 1 \text{ より,} \\
 f'(x) &= 3ax^2 - 12ax + 9a \\
 &= 3a(x^2 - 4x + 3) \\
 &= 3a(x-3)(x-1)
 \end{aligned}$$

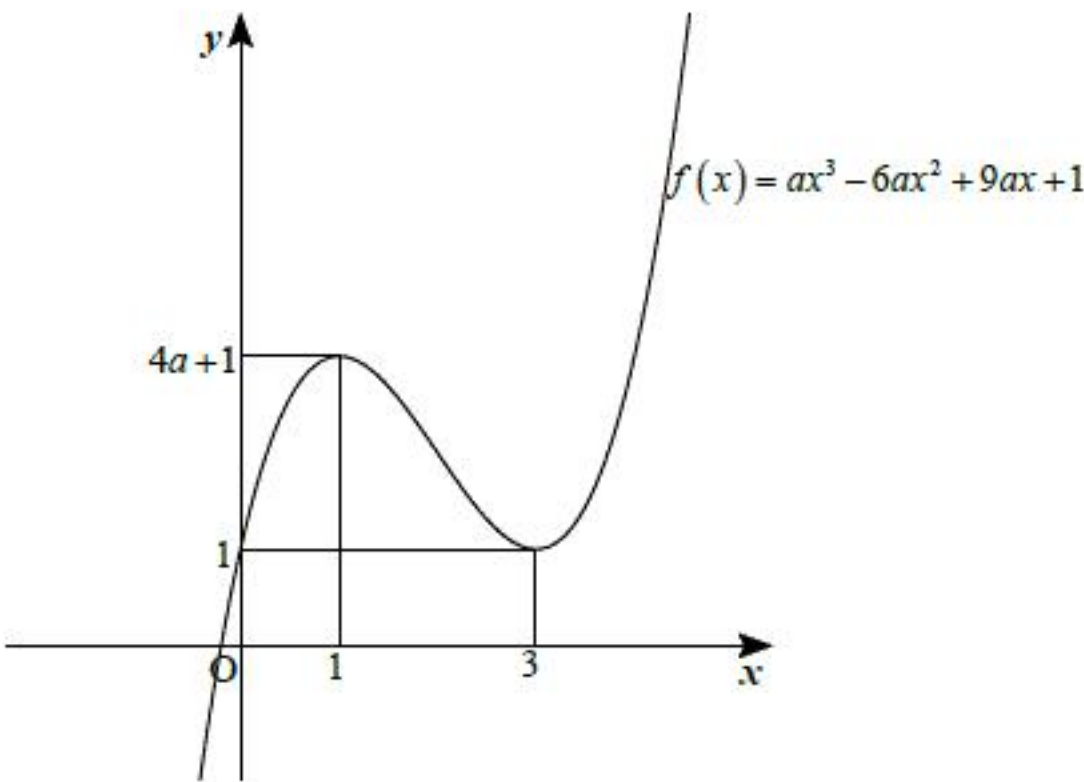
である。また、 $a > 0$ を考慮して増減表を書くと下表のようになる。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大値	↘	極小値	↗

よって、

$$\begin{aligned}
 \text{極大値：} f(1) &= 4a + 1 \\
 \text{極小値：} f(3) &= 1
 \end{aligned}$$

となり、グラフは下図のようになる。



(答)極大値： $f(1) = 4a + 1$ ，極小値： $f(3) = 1$ ，前図

2.

点Cにおける曲線 $y = f(x)$ の接線は

$$\begin{aligned}
 y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\
 \Leftrightarrow y &= 3a(t-3)(t-1)(x-t) + at^3 - 6at^2 + 9at + 1
 \end{aligned}$$

となる。また、線分ABの式は

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{f(t) - f(-1)}{5}(x+1) + f(-1) \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{(at^3 - 6at^2 + 9at + 1) - (-16a + 1)}{5}(x+1) + (-16a + 1)
 \end{aligned}$$

である。この2つの直線が平行になるので

$$\begin{aligned}
 3a(t-3)(t-1) &= \frac{(at^3 - 6at^2 + 9at + 1) - (-16a + 1)}{5} \\
 \Leftrightarrow 15(t^2 - 4t + 3) &= t^3 - 6t^2 + 9t + 16 \quad (\because a > 0) \\
 \Leftrightarrow t^3 - 21t^2 + 69t + 29 &= 0
 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $g(t) = t^3 - 21t^2 + 69t + 29$ としたとき $g(t) = 0$ を満たす t が $-1 < t < 3$ に1つだけ存在することを示せばよい。まず、

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= 3t^2 - 42t + 69 \\
 &= 3(t^2 - 14t + 23)
 \end{aligned}$$

であるので、増減表を書くと

t	-1	...	$7 - \sqrt{26}$	...	3
$g'(t)$	↘	+	0	-	↘
$g(t)$	↘	↗	極大値	↘	↘

となる。ここで、

$$g(t) = (3t^2 - 42t + 69)\left(\frac{1}{3}t - \frac{7}{3}\right) - 52t + 190$$

と変形できるので、これを用いると

$$\begin{cases} g(7 - \sqrt{26}) = -364 + 190 + 52\sqrt{26} = -174 + 52\sqrt{26} > -174 + 52 \cdot 5 > 0 \\ g(3) = 74 > 0 \\ g(-1) < 0 \end{cases}$$

である。よって、 $g(t) = 0$ を満たす t が $-1 < t < 3$ に1つだけ存在することがわかるので、題意は示せた。

(証明終)