

〔1〕

1.

ケーリー・ハミルトンの公式より

$$\begin{aligned} A^2 - (2+4)A + \{2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1\}E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 - 6A + 9E &= O \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、題意は示された。

(証明終)

2.

まず、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_{n-1} - y_{n-1} \\ x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - y_{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y_n = x_{n-1} + 4y_{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。②より

$$x_{n-1} = y_n - 4y_{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となるので③を①に代入すると

$$\begin{aligned} y_{n+1} - 4y_n &= 2(y_n - 4y_{n-1}) - y_{n-1} \\ \Leftrightarrow y_{n+1} - 6y_n + 9y_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow y_{n+1} - 3y_n &= 3(y_n - 3y_{n-1}) \\ \Leftrightarrow y_n - 3y_{n-1} &= 3^{n-2}(y_2 - 3y_1) \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であるので、これを④に代入すると

$$\begin{aligned} y_n - 3y_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow y_n &= 3y_{n-1} = 3^{n-1}y_1 = -3^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これを③に代入すると

$$\begin{aligned} x_n &= -3^n + 4 \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^{n-1}(4-3) \\ &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これらは $n=1$ に対しても成り立つ。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} x_n = 3^{n-1} \\ y_n = -3^{n-1} \end{cases}$$

3.

1.より

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 9E &= O \\ \Leftrightarrow (A - 3E)^2 &= O \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。また、

$$A^n = \{3E + (A - 3E)\}^n$$

と表すことができるので、これに二項定理を使うと $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (3E)^{n-k} (A - 3E)^k \\ &= \sum_{k=0}^1 {}_n C_k (3E)^{n-k} (A - 3E)^k \quad (\because \textcircled{5}) \\ &= 3^n E + 3^{n-1} n (A - 3E) \\ &= n \cdot 3^{n-1} A + (-n+1) \cdot 3^n E \quad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。よって、題意のように

$$A^n = a_n A + b_n E$$

と表すとき、これと⑥の係数を比較することにより

$$\begin{cases} a_n = n \cdot 3^{n-1} \\ b_n = -(n-1) \cdot 3^n \end{cases}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} a_n = n \cdot 3^{n-1} \\ b_n = -(n-1) \cdot 3^n \end{cases}$$

[2]

1.

$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{x^2}{a^2} + \frac{d}{dx} \frac{y^2}{b^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \frac{y^2}{b^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{2y}{b^2} \right) &= -\frac{2x}{a^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2 x}{a^2 y}\end{aligned}$$

となるので、点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y - y_1 &= -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \\ \Leftrightarrow \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} &= -\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} \\ \Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} &= \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\end{aligned}$$

である。ここで (x_1, y_1) は楕円上の点なので $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ を満たすことから、接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

となる。

(証明終)

2.

A_1 の座標を (x_1, y_1) 、 A_2 の座標を (x_2, y_2) とおくと、それぞれの接線の方程式は 1. より

$$\begin{aligned}\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} &= 1 \\ \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

となる。これらは点 (p, q) を通るので

$$\begin{aligned}\frac{x_1 p}{a^2} + \frac{y_1 q}{b^2} &= 1 \\ \frac{x_2 p}{a^2} + \frac{y_2 q}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

をみたす。よって直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ は A_1 と A_2 を通る。このような直線はただ 1 本のみ存在

するので直線 $A_1 A_2$ の方程式は $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ に他ならない。

(証明終)

3.

直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ と $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の交点を考えると、 $q \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{b^2}{q} \left(1 - \frac{px}{a^2} \right) \right\}^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{q^2} \left(1 - \frac{2px}{a^2} + \frac{p^2 x^2}{a^4} \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} - \frac{b^2 p^2}{a^4 q^2} \right) x^2 + \frac{2b^2 p}{a^2 q^2} x - \frac{b^2}{q^2} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 q^2 - b^2 p^2}{a^4 q^2} x^2 + \frac{2b^2 p}{a^2 q^2} x - \frac{b^2}{q^2} - 1 = 0\end{aligned}$$

となる。ここで (p, q) は C_2 上の点より $\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 1$ をみたすので

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow b^2 p^2 - a^2 q^2 &= a^2 b^2 \\ \Leftrightarrow a^2 q^2 - b^2 p^2 &= -a^2 b^2\end{aligned}$$

となる。これを代入すると

$$\begin{aligned}\frac{a^2 q^2 - b^2 p^2}{a^4 q^2} x^2 + \frac{2b^2 p}{a^2 q^2} x - \frac{b^2}{q^2} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{b^2}{a^2 q^2} x^2 + \frac{2b^2 p}{a^2 q^2} x - \frac{b^2}{q^2} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + a^2 + \frac{a^2 q^2}{b^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + a^2 + \frac{b^2 p^2 - a^2 b^2}{b^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + a^2 + p^2 - a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - p)^2 &= 0 \\ \therefore x = p \quad (\text{重解})\end{aligned}$$

となる。これを直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{a^2} + \frac{qy}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{b^2}{q} \left(1 - \frac{p^2}{a^2} \right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{b^2}{q} \cdot \left(-\frac{q^2}{b^2} \right) = -q\end{aligned}$$

となる。つまり、直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ と C_2 は共有点 $(p, -q)$ をもつ。

ここで、1. と同様に C_2 に対して $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$ が成り立つので点 $(p, -q)$ における接線の傾きは

$$\frac{b^2 p}{a^2 (-q)} = -\frac{b^2 p}{a^2 q}$$

となり、直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ の傾きと等しい。したがって、 $q \neq 0$ のとき、直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ は

$(p, -q)$ において C_2 と接する。次に、 $q = 0$ のときを考える。このとき $p = \pm a$ となるため、

$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ は $x = \pm a$ と表される。これは確かに C_2 と接する。以上より、直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ は

C_2 に接する。

(証明終)

[3]

1.

$$y = x \sin x$$

$$\Rightarrow y' = \sin x + x \cos x$$

より、 $(a, a \sin a)$ における接線の方程式は

$$y - a \sin a = (\sin a + a \cos a)(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = (\sin a + a \cos a)x - a^2 \cos a \cdots \textcircled{1}$$

となる。これが原点を通るとき

$$a^2 \cos a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, a = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (\text{ただし } n \text{ は整数})$$

となる。これらを①に代入すると、 $a = 0$ のとき

$$y = 0$$

$$a = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ のとき}$$

$$y = \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) + \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right\} x$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x$$

となる。以上から求める接線の方程式は

$$y = 0, y = \pm x$$

となる。

(答) $y = 0, y = \pm x$

2.

$C: y = x \sin x$ と直線 $y = \frac{1}{2}x$ の第一象限における交点を考えると

$$x \sin x = \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \quad (\text{ただし } n \text{ は正の整数})$$

となる。題意より $x = \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi$ は P_{2n-1} の x 座標、 $x = \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi$ は P_{2n} の x 座標とわ

かる。 C は線分 $P_{2n-1}P_{2n}$ よりも上側に存在するので、求める面積 S_n は

$$S_n = \int_{\frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi}^{\frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi} \left(x \sin x - \frac{1}{2}x \right) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi}^{\frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi} \left\{ x(-\cos x)' - \frac{1}{2}x \right\} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi}^{\frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi} \left\{ (-x \cos x)' + \cos x - \frac{1}{2}x \right\} dx$$

$$= \left[-x \cos x - \frac{1}{4}x^2 \right]_{\frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi}^{\frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi} + \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi}^{\frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi}$$

$$= -\left\{ \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\} \cos \left(\frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right) + \left\{ \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\} \cos \left(\frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right)$$

$$- \frac{1}{4} \left[\left\{ \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\}^2 - \left\{ \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\}^2 \right]$$

$$+ \sin \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\} - \sin \left\{ \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\}$$

$$= (4n-3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi \right) \pi$$

となる。

(答) $S_n = (4n-3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi \right) \pi$

3.

P_{2n-1} の y 座標は $\frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\}$ 、 P_{2n} の y 座標は $\frac{1}{2} \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\}$ より P_{2n-1} と P_{2n} の距

離を求めると

$$= \sqrt{\left[\left\{ \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\} - \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\} \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \right\} \right]^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{3} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{3} \right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \pi$$

となる。また、 Q_n と直線 $P_{2n-1}P_{2n}$ との距離は Q_n と $y = \frac{1}{2}x (\Leftrightarrow x - 2y = 0)$ の距離に等しいので、

その距離を求めると

$$\frac{\left| \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi - 2 \left\{ \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi \right\} \right|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi}{\sqrt{5}}$$

となる。以上から

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \pi \cdot \frac{\frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\pi}{6} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi \right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{12} (4n-3)$$

となる。したがって

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{(4n-3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi \right) \pi}{\frac{\pi^2}{12} (4n-3)}$$

$$= \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{\pi}$$

となる。以上より $\frac{S_n}{T_n}$ が n によらず一定であることが示せた。

(証明終)

[4]

1.

$n=4m$ とおく。 $1 \leq l \leq n$ となる整数 l において

$$\begin{aligned} l+(n-l+1) &= n+1 \\ &= 4m+1 \end{aligned}$$

が l に依存しないことから

$$\sum_{l=1}^m \{l+(n-l+1)\} = \sum_{l=m+1}^{2m} \{l+(n-l+1)\} \quad (=m(4m+1))$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} A_n &= \{1, 2, \dots, m\} \cup \{n-m+1, n-m+2, \dots, n\} \\ B_n &= \{m+1, m+2, \dots, n-m\} \end{aligned}$$

のように X_n を分ければ

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{l=1}^m l + \sum_{l=1}^m (n-l+1) \\ &= \sum_{l=1}^m \{l+(n-l+1)\} \\ &= m(4m+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \\ b_n &= \sum_{l=m+1}^{2m} l + \sum_{l=m+1}^{2m} (n-l+1) \\ &= \sum_{l=m+1}^{2m} \{l+(n-l+1)\} \\ &= m(4m+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

となる。以上から題意は示せた。

(証明終)

2.

$n+1=4m$ とすると

$$\begin{aligned} n+1 &= 4m \\ \Leftrightarrow n &= 4m-1 \end{aligned}$$

である。このとき $a_n=b_n$ となるように X_n を分けられることを m に関する数学的帰納法で示す。

[1] $m=1$ のとき

$$\begin{aligned} A_3 &= \{1, 2\} \\ B_3 &= \{3\} \end{aligned}$$

とすると、 $a_3=b_3$ となるように X_n を分けられる。

[2] $m=k$ のとき $a_{4k-1}=b_{4k-1}$ となるように X_{4k-1} を分けられることを仮定する。

このとき、

$$4k+(4k+3)=(4k+1)+(4k+2) \quad (=8k+3)$$

より

$$\begin{aligned} A_{4k+3} &= A_{4k-1} \cup \{4k, 4k+3\} \\ B_{4k+3} &= B_{4k-1} \cup \{4k+1, 4k+2\} \end{aligned}$$

とおくと A_{4k+3} と B_{4k+3} は X_{4k+3} を $a_{4k+3}=b_{4k+3}$ となるように分けられる。

以上[1], [2]より、すべての n に対して X_n を $a_n=b_n$ となるように分けられることが示せた。

(証明終)

3.

l を自然数とする。 n も $n+1$ も 4 の倍数でないとき $n=4l+1$ または $n=4l+2$ と表すことができる。

[1] $n=4l+1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n+b_n &= \sum_{l=1}^n l = \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= (4l+1)(2l+1) \end{aligned}$$

$a_n=b_n$ と仮定すると

$$2a_n=(4l+1)(2l+1)$$

となる。これは左辺が偶数、右辺が奇数となり矛盾する。

[2] $n=4l+2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n+b_n &= \sum_{l=1}^n l = \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= (2l+1)(4l+3) \end{aligned}$$

$a_n=b_n$ と仮定すると

$$2a_n=(2l+1)(4l+3)$$

となる。これは左辺が偶数、右辺が奇数となり矛盾する。

以上[1], [2]より、 n も $n+1$ も 4 の倍数でないとき $a_n=b_n$ となるようには X_n を分けられないことが示せた。

(証明終)