

[1]

1.

まず,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OE}}{5} \\ \overrightarrow{OD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{b} \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OE} &= 5\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{a} \\ &= 3\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a} \\ \therefore \overrightarrow{OE} &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

2.

$k, m$  をそれぞれ実数とすると  $\overrightarrow{OF}$  は

$$\begin{cases} \overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OE} = -\frac{2k}{3}\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{b} + m\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b} + m\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \frac{m}{3}\overrightarrow{a} + (1-m)\overrightarrow{b} \end{cases}$$

の2通りで表せるので、 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$  が1次独立であることに注意して係数を比較すると

$$\begin{cases} \frac{m}{3} = -\frac{2k}{3} \cdots \textcircled{1} \\ k = (1-m) \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。①より,

$$\begin{aligned} \frac{m}{3} &= -\frac{2k}{3} \\ \Leftrightarrow m &= -2k \end{aligned}$$

となるので、これを②に代入すると

$$\begin{aligned} k &= (1+2k) \\ \Leftrightarrow k &= -1 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

3.

2.より  $m=2$  であるから,

$$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$$

である。よって,

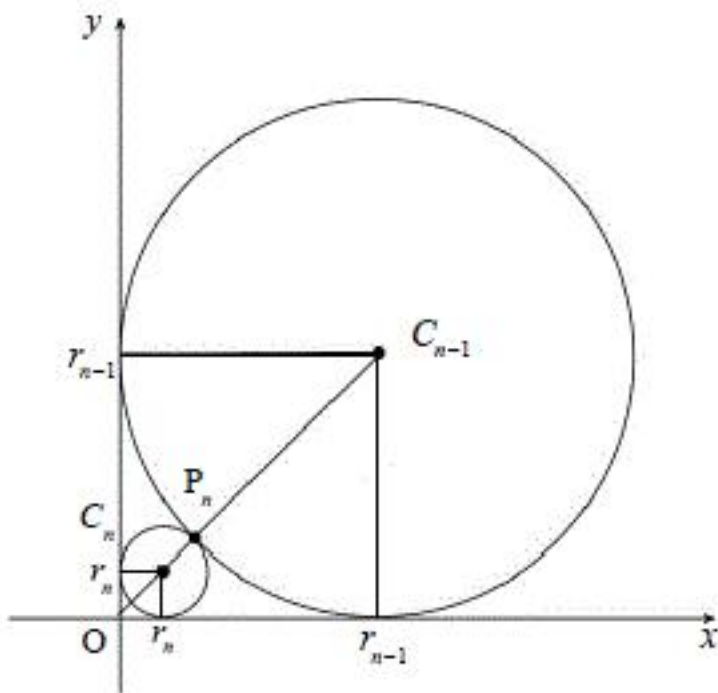
$$FC:CB=1:1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad FC:CB=1:1$$

[2]

1.



円  $C_n$  の中心は  $(r_n, r_n)$  なので、上図のような幾何学的関係より、

$$\begin{aligned} OP_n &= \sqrt{2}r_n + r_n \\ &= (1 + \sqrt{2})r_n \end{aligned}$$

となる。

(答)  $OP_n = (1 + \sqrt{2})r_n$

2.

円  $C_n$  と  $C_{n-1}$  の中心間の距離は

$$\begin{aligned} \sqrt{(r_{n-1} - r_n)^2 + (r_{n-1} - r_n)^2} &= r_{n-1} + r_n \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}(r_{n-1} - r_n) &= r_{n-1} + r_n \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)r_n &= (\sqrt{2} - 1)r_{n-1} \\ \Leftrightarrow r_n &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}r_{n-1} \end{aligned}$$

となるので、数列  $\{r_n\}$  は公比  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$  の等比数列となる。

(証明終)

3.

2より

$$\begin{aligned} r_n &= \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^{n-1} r_1 \\ &= \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

であるので、円  $C_6$  の式は

$$\left\{ x - \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 \right\}^2 + \left\{ y - \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 \right\}^2 = \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^{10} \cdots \textcircled{1}$$

となる。題意を示すには

$$(\text{円 } C_6 \text{ の中心と原点の距離}) + r_6 < \frac{1}{1000}$$

を示せばよい。①より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1000} - \left\{ \sqrt{2} \times \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 + \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^5 \right\} \\ &= \frac{1}{1000} - (\sqrt{2} + 1)(3 - 2\sqrt{2})^5 \\ &> \frac{1}{1000} - 2.42 \times (0.18)^5 \quad (\because 1.41 < \sqrt{2} < 1.42) \\ &= 0.001 - 0.000457 \cdots \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、題意は示せた。

(証明終)

[3]

1.

まず,  $y = x^2 - x + 1$  より

$$y' = 2x - 1$$

であるので  $C$  の点  $(t, t^2 - t + 1)$  における接線の方程式は

$$y = (2t - 1)(x - t) + t^2 - t + 1$$

である。これが  $(0, 0)$  を通るので

$$0 = -2t^2 + t + t^2 - t + 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1$$

$$\therefore t = \pm 1$$

となる。よって、求める 2 つの直線の方程式は

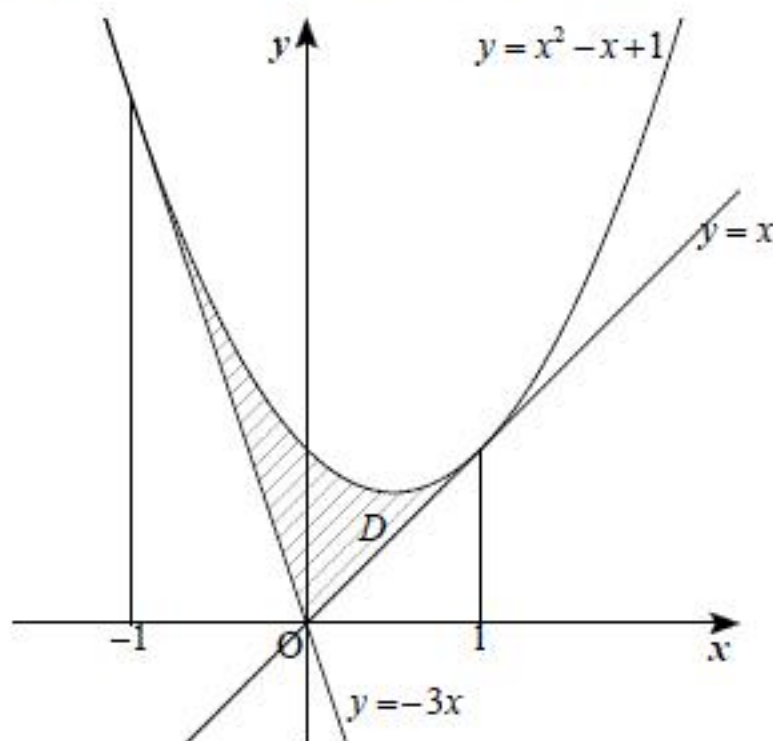
$$\begin{cases} y = x \\ y = -3x \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} y = x \\ y = -3x \end{cases}$$

2.

1.より求める図は下図のようになり,  $D$  は下図の斜線部である。



(答)前図

3.

2.の図を考えると求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (x^2 - x + 1)^2 dx - \pi \int_{-1}^0 (-3x)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^4 + 3x^2 + 1) dx - 9\pi \int_{-1}^0 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{5}x^5 + x^3 + x \right]_0^1 - 9\pi \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 - \pi \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{5} + 1 + 1 \right) - 10\pi \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{16}{15}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) V = \frac{16}{15}\pi$$

[4]

1.

ケーリー・ハミルトンの公式より

$$\begin{aligned} A^2 - (2+4)A + \{2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1\}E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 - 6A + 9E &= O \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、題意は示せた。

(証明終)

2.

まず、 $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_{n-1} - y_{n-1} \\ x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - y_{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y_n = x_{n-1} + 4y_{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。②より

$$x_{n-1} = y_n - 4y_{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となるので③を①に代入すると

$$\begin{aligned} y_{n+1} - 4y_n &= 2(y_n - 4y_{n-1}) - y_{n-1} \\ \Leftrightarrow y_{n+1} - 6y_n + 9y_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow y_{n+1} - 3y_n &= 3(y_n - 3y_{n-1}) \\ \Leftrightarrow y_n - 3y_{n-1} &= 3^{n-2}(y_2 - 3y_1) \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であるので、これを④に代入すると

$$\begin{aligned} y_n - 3y_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow y_n &= 3y_{n-1} = 3^{n-1}y_1 = -3^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これを③に代入すると

$$\begin{aligned} x_n &= -3^n + 4 \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^{n-1}(4-3) \\ &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これらは $n=1$ に対しても成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} x_n = 3^{n-1} \\ y_n = -3^{n-1} \end{cases}$$

3.

1.より

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 9E &= O \\ \Leftrightarrow (A - 3E)^2 &= O \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。また、

$$A^n = \{3E + (A - 3E)\}^n$$

と表すことができるので、これに二項定理を使うと $n \geq 2$  のとき、

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (3E)^{n-k} (A-3E)^k \\ &= \sum_{k=0}^1 {}_n C_k (3E)^{n-k} (A-3E)^k \quad (\because \textcircled{5}) \\ &= 3^n E + 3^{n-1} n (A-3E) \\ &= n \cdot 3^{n-1} A + (-n+1) \cdot 3^n E \quad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。よって、題意のように

$$A^n = a_n A + b_n E$$

と表すとき、これと⑥の係数を比較することにより

$$\begin{cases} a_n = n \cdot 3^{n-1} \\ b_n = -(n-1) \cdot 3^n \end{cases}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a_n = n \cdot 3^{n-1} \\ b_n = -(n-1) \cdot 3^n \end{cases}$$