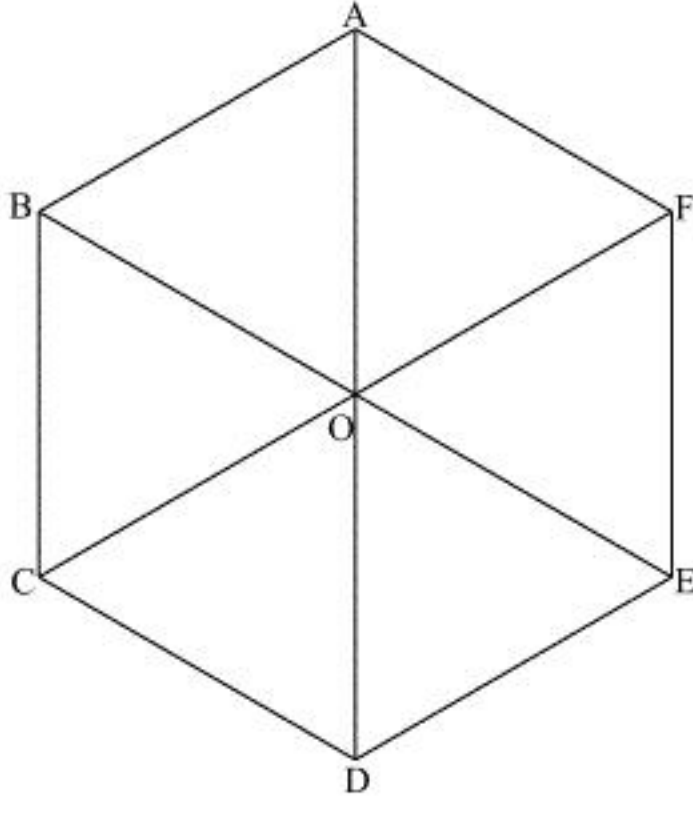


【1】

1.

以下の図のように、線分 AD, BE, CF の交点を点 O とする。



図より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} \\ &= \vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} \\ &= 2\vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AO} \\ &= 2\vec{a} + 2\vec{b} \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AF} \\ &= \vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

2.

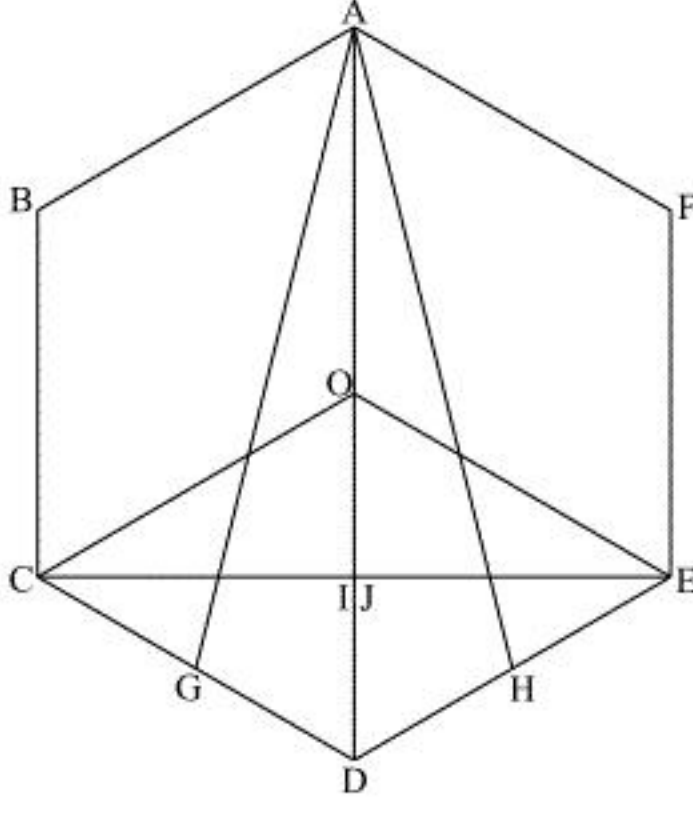
正六角形 ABCDEF の面積を S とおくと、題意より、四角形 ABCG と四角形 AFEH と四角形 AGDH の面積はすべて等しく $\frac{S}{3}$ であり、四角形 ABCD, AFED の面積はともに $\frac{S}{2}$ である。従って、三角形 ADG, ADH の面積はともに、

$$\frac{S}{2} - \frac{S}{3} = \frac{S}{6}$$

であることが分かる。正六角形 ABCDEF の面積は一辺の長さが 1 の正三角形 6 つ分の面積と等しいため、三角形 ADG, ADH の面積はともに、

$$\begin{aligned}\frac{S}{6} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

と計算できる。ここで、以下の図のように C, E から線分 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ I, J とすると、三角形 ADC, ADE は、底辺 AD、高さ CI, EJ の三角形と見なすことができる。



1. の図より、AD の長さは 2 であり、CI, EJ の大きさは一辺の長さが 1 の正三角形の高さ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ と等しいから、三角形 ADC, ADE の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と計算できる。以上より、線分 AG, AH はそれぞれ三角形 ADC, ADE の面積を 2 等分する線分であることが分かるから、

$$\begin{aligned}\text{CG} : \text{GD} &= \text{DH} : \text{HE} \\ &= 1 : 1\end{aligned}$$

である。従って、

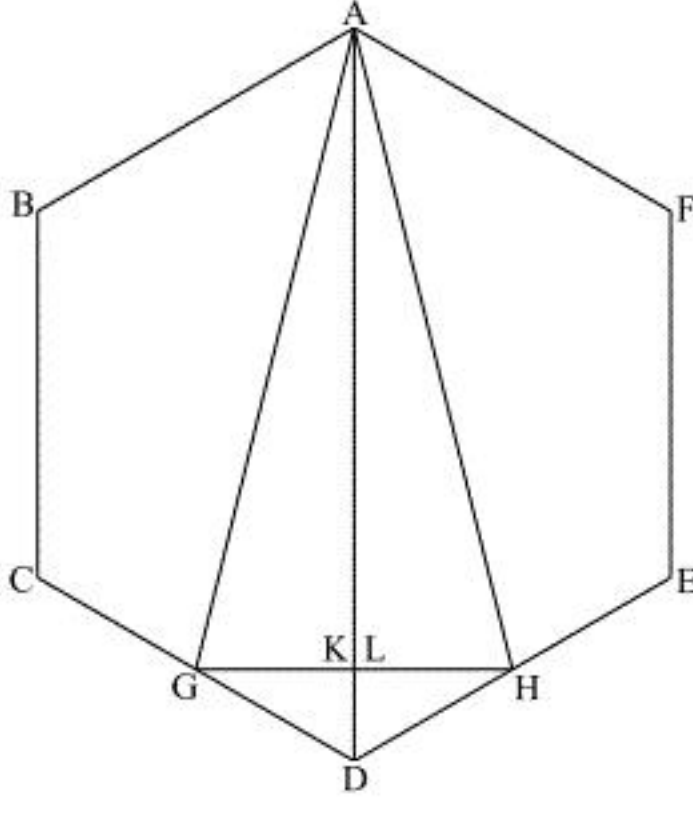
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{AH} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{1}{2}(2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

と計算することができる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AG} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}, \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$$

3.

以下の図のように G, H から線分 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ K, L とすると、三角形 ADG, ADH は、底辺 AD、高さ GK, HL の三角形と見なすことができる。



図は線分 AD について線対称であるため、点 K, L は一致する。また、 $\angle AKG = \angle ALH = 90^\circ$ であるから、G, K, L, H は同一直線上に存在する。2. より、三角形 ADG の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ であること

から、三角形 ADG の面積についての式から、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{GK}| \\ \therefore |\overrightarrow{GK}| &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\because |\overrightarrow{AD}| = 2)\end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GH}| &= 2|\overrightarrow{GK}| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

と計算することができる。また、 $\angle BAF = 120^\circ$ より、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

であることが分かるため、これと 2. の結果から、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AG}| &= \sqrt{\left|2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right|^2} \\ &= \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot 1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \cdot 1^2} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{AH}|$ であるため、三角形 AGH に余弦定理を用いることで、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\overrightarrow{AG}|^2 + |\overrightarrow{AH}|^2 - |\overrightarrow{GH}|^2}{2|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{AH}|} \\ &= \frac{\frac{13}{4} + \frac{13}{4} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} \\ &= \frac{23}{26}\end{aligned}$$

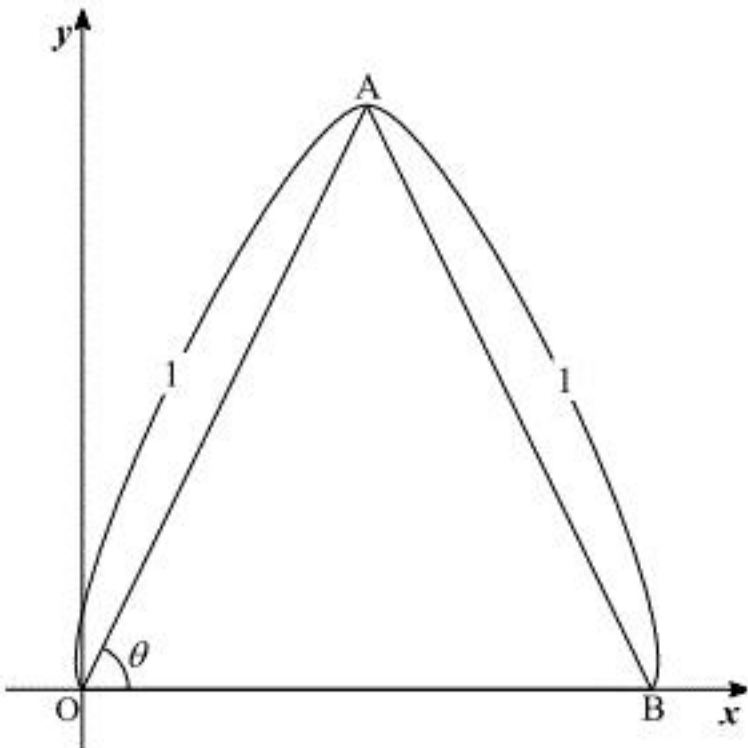
と計算することができる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{23}{26}$$

〔2〕

1.

題意より，二等辺三角形 AOB は以下の図のようにになっている。



点 A は第 1 象限に存在するから， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。図より，点 A の座標は，

$$A(\cos \theta, \sin \theta)$$

であると分かる。一方，x 軸上の点 B の x 座標は点 A の x 座標の 2 倍であるから，点 B の座標は，

$$B(2 \cos \theta, 0)$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \ A(\cos \theta, \sin \theta), \ B(2 \cos \theta, 0)$$

2.

$f(x)$ を，実数 a, b, c ($a \neq 0$) を用いて，

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおく。このとき，放物線 $y = f(x)$ が 3 点 O, A, B を通るという条件から，

$$\begin{cases} c = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a \cos^2 \theta + b \cos \theta + c = \sin \theta & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 4a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta + c = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。①を②，③式に代入することで，

$$\begin{cases} a \cos^2 \theta + b \cos \theta = \sin \theta & \cdots \cdots \textcircled{2}' \\ 4a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3}' \end{cases}$$

を得る。③' - 2 × ②' より，

$$\begin{aligned} 2a \cos^2 \theta &= -2 \sin \theta \\ \therefore a &= -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta \neq 0 \right) \end{aligned}$$

であることが分かり，これを③'に代入することで，

$$\begin{aligned} 4 \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right) \cdot \cos^2 \theta + 2b \cos \theta &= 0 \\ \therefore b &= 2 \tan \theta \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta \neq 0 \right) \end{aligned}$$

を得る。以上より，

$$f(x) = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + 2(\tan \theta)x$$

である。

$$(\text{答}) \ f(x) = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + 2(\tan \theta)x$$

3.

1.の図と 2.の結果より，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2 \cos \theta} \left\{ -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + 2(\tan \theta)x \right\} dx \\ &= \left[-\frac{\sin \theta}{3 \cos^2 \theta} x^3 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x^2 \right]_0^{2 \cos \theta} \\ &= \frac{4}{3} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2 \sin 2\theta}{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \ S = \frac{2 \sin 2\theta}{3}$$

4.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より，

$$\begin{aligned} 0 < \sin 2\theta &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 0 < \frac{2}{3} \sin 2\theta &\leq \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow 0 < S &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って， S の最大値は

$$S = \frac{2}{3}$$

であり，このとき，

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 1 \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最大値 } S = \frac{2}{3}$$

[3]

1.

題意より、各点の座標は、

$$\begin{aligned} P_1(1, 1) \\ Q_1(-1, 1) \\ P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ Q_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ P_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ Q_3\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ P_4\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\ Q_4\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \\ P_5\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \end{aligned}$$

と順次求めることができる。

$$(\text{答}) \quad P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), P_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), P_4\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right), P_5\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

2.

$$P_n(a_n \cos \theta_n, a_n \sin \theta_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおく。このとき、点 Q_n は点 P_n を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた点であるため、

$$Q_n\left(a_n \cos\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right), a_n \sin\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

と表すことができる。従って、点 P_{n+1} の座標は、点 Q_n の座標をそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍することで、

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{2}a_n \cos\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{2}a_n \sin\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

であることが分かる。ここで、 $\textcircled{1}$ より、

$$P_{n+1}(a_{n+1} \cos \theta_{n+1}, a_{n+1} \sin \theta_{n+1})$$

であるから、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。条件より、

$$P_1\left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

と表すことができるから、

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。以上 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、

$$\begin{cases} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \\ \theta_n = \frac{2n-1}{4}\pi \end{cases}$$

であることが分かるから、

$$P_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \cos \frac{2n-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \sin \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

と表せる。従って、 $\sin \frac{8k+1}{4}\pi = \sin \frac{\pi}{4}$ 、 $\cos \frac{8k+1}{4}\pi = \cos \frac{\pi}{4}$ に注意すれば、 P_{4k+1} の座標は、

$$\begin{aligned} P_{4k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+1)-1}} \cos \frac{2(4k+1)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+1)-1}} \sin \frac{2(4k+1)-1}{4}\pi\right) \\ \Leftrightarrow P_{4k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{16^k} \cos \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{16^k} \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ \therefore P_{4k+1}\left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right) \end{aligned}$$

と表せることが分かる。

$$(\text{答}) \quad P_{4k+1}\left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right)$$

3.

1.より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_1} &= (1, 1) \\ \overrightarrow{OP_2} &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{OP_3} &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ \overrightarrow{OP_4} &= \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\ \overrightarrow{OP_5} &= \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \end{aligned}$$

であることが分かる。また、 $\overrightarrow{OX_n}$ の定義より、

$$\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{OX_{n-1}} + \overrightarrow{OP_n}$$

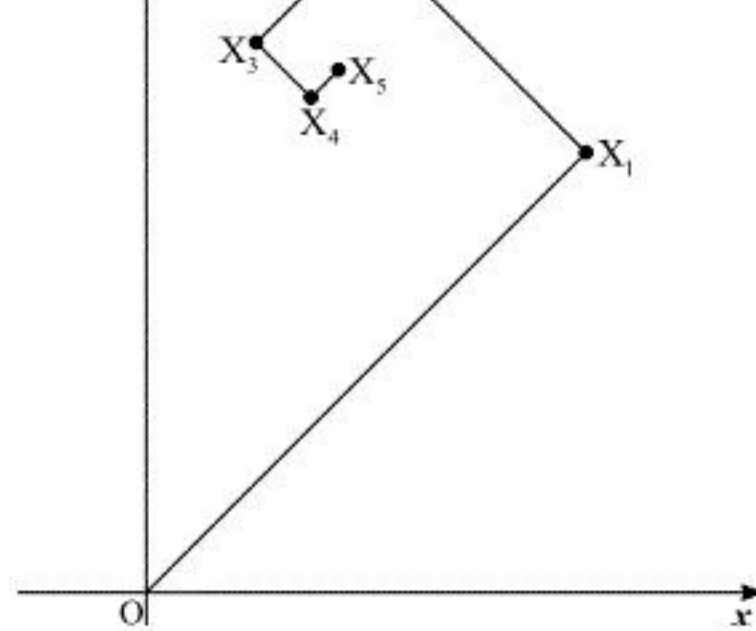
である。従って、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX_1} &= \overrightarrow{OP_1} \\ &= (1, 1) \\ \overrightarrow{OX_2} &= \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OP_2} \\ &= (1, 1) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{OX_3} &= \overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OP_3} \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) \\ \overrightarrow{OX_4} &= \overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OP_4} \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \\ \overrightarrow{OX_5} &= \overrightarrow{OX_4} + \overrightarrow{OP_5} \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) + \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \\ &= \left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right) \end{aligned}$$

と表すことができるため、点 X_2, X_3, X_4, X_5 の座標は、

$$X_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), X_3\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right), X_4\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right), X_5\left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right)$$

である。これらの点と線分 $OX_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5$ を座標平面上に図示すると以下のようになる。



$$(\text{答}) \quad X_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), X_3\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right), X_4\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right), X_5\left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right), \text{ 前図}$$

4.

2.より、

$$\overrightarrow{OP_n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \cos \frac{2n-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \sin \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_{4k+1}} &= \left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right) \\ \overrightarrow{OP_{4k+2}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+2)-1}} \cos \frac{2(4k+2)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+2)-1}} \sin \frac{2(4k+2)-1}{4}\pi\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 16^k} \cos \frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 16^k} \sin \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2 \cdot 16^k}, \frac{1}{2 \cdot 16^k}\right) \\ \overrightarrow{OP_{4k+3}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+3)-1}} \cos \frac{2(4k+3)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+3)-1}} \sin \frac{2(4k+3)-1}{4}\pi\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 16^k} \cos \frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 16^k} \sin \frac{5\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{4 \cdot 16^k}, -\frac{1}{4 \cdot 16^k}\right) \\ \overrightarrow{OP_{4k+4}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+4)-1}} \cos \frac{2(4k+4)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+4)-1}} \sin \frac{2(4k+4)-1}{4}\pi\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{8 \cdot 16^k} \cos \frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8 \cdot 16^k} \sin \frac{7\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{8 \cdot 16^k}, -\frac{1}{8 \cdot 16^k}\right) \end{aligned}$$

と表せる。従って、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_{4k+1}} + \overrightarrow{OP_{4k+2}} + \overrightarrow{OP_{4k+3}} + \overrightarrow{OP_{4k+4}} \\ &= \left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right) + \left(-\frac{1}{2 \cdot 16^k}, \frac{1}{2 \cdot 16^k}\right) + \left(-\frac{1}{4 \cdot 16^k}, -\frac{1}{4 \cdot 16^k}\right) + \left(\frac{1}{8 \cdot 16^k}, -\frac{1}{8 \cdot 16^k}\right) \\ &= \frac{1}{16^k} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{16^k} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \end{aligned}$$

であることより

$$\overrightarrow{OX_{4(k+1)}} = \overrightarrow{OX_{4k}} + \overrightarrow{OP_{4k+1}} + \overrightarrow{OP_{4k+2}} + \overrightarrow{OP_{4k+3}} + \overrightarrow{OP_{4k+4}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OX_{4(k+1)}} - \overrightarrow{OX_{4k}} = \frac{1}{16^k} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

を得る。ここで、3.より、

$$\overrightarrow{OX_4} = \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX_{4k}} &= \overrightarrow{OX_4} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{16^i} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \frac{1}{16^{k-1}}}{1 - \frac{1}{16}} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \\ &= \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k} (2, 6) \end{aligned}$$

と計算できる。従って、

$$X_{4k} \left(2 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k}, 6 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k}\right)$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad X_{4k} \left(2 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k}, 6 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k}\right)$$

【4】

1.

曲線 C_1 の方程式について、

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 2x^2 \\ y' &= 3x^2 - 4x \\ &= 3x \left(x - \frac{4}{3} \right) \\ y'' &= 6x - 4 \end{aligned}$$

より、 $C_1: y = x^3 - 2x^2$ の増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...	$\frac{4}{3}$	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y		極大値		変曲点		極小値	

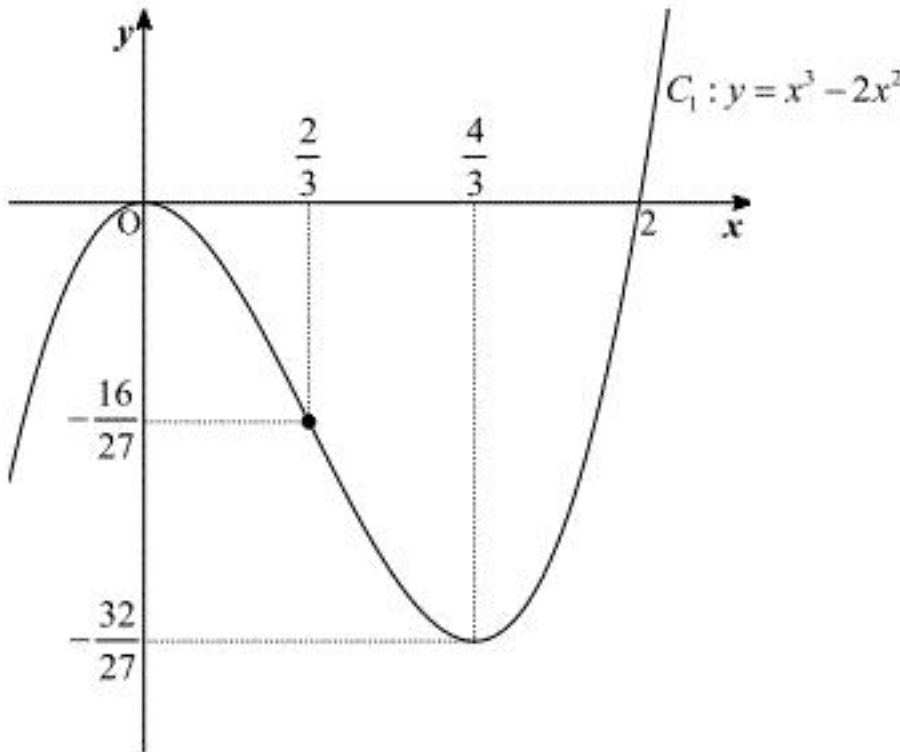
増減表より、

$$x=0 \text{ のとき極大値 } y=0$$

$$x=\frac{2}{3} \text{ のとき変曲点 } y=-\frac{16}{27}$$

$$x=\frac{4}{3} \text{ のとき極小値 } y=-\frac{32}{27}$$

をとるから、曲線 C_1 の概形は以下の図のようになる。



(答) 前図

2.

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2 \end{aligned}$$

より、点 P の座標は、

$$P(2, 0)$$

である。また、1.より、

$$y' = 3x^2 - 4x$$

であるから、点 P における接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2)(x - 2) \\ &= 4x - 8 \end{aligned}$$

であると分かる。

(答) $\ell: y = 4x - 8$

3.

直線 ℓ が曲線 C_2 の接線となるということは、直線 ℓ と曲線 C_2 の方程式から y を消去することで得られる 2 次方程式、

$$\begin{aligned} 4x - 8 &= x^2 + ax + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + (a - 4)x + 9 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が重解を持つ、つまり、①の判別式 D に対して、

$$D = 0$$

が成り立つということである。従って、求める a の値は、

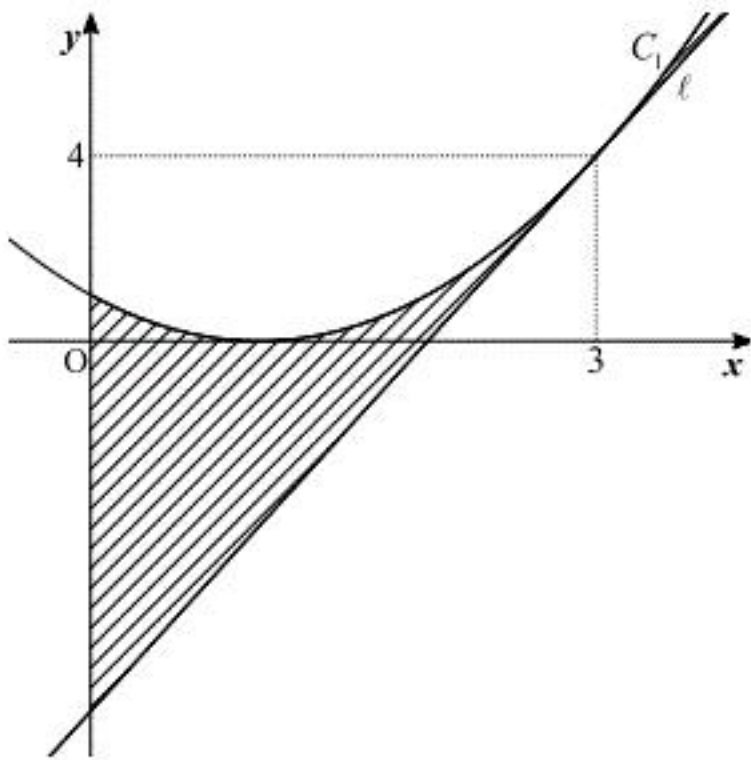
$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 4)^2 - 4 \cdot 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a - 20 &= 0 \\ \therefore a &= -2, 10 \end{aligned}$$

である。

(答) $a = -2, 10$

4.

$a = -2$ の場合を考えればよい。このとき、曲線 C_2 と直線 ℓ は以下の図のようになっている。



求める面積を S とすると、 S は図の斜線部であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{ (x^3 - 2x^2) - (4x - 8) \right\} dx \\ &= \int_0^3 (x^3 - 6x + 9) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2 + 9x \right]_0^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

と計算することができる。

(答) $S = 9$

[5]

1.

題意より、共有点の x 座標 a ($0 \leq a < \frac{\pi}{2}$) に対して、

$$\tan a = \cos a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin a}{\cos a} = \cos a$$

$$\Leftrightarrow \sin a = \cos^2 a$$

$$\Leftrightarrow \sin a = 1 - \sin^2 a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \sin a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because \sin a \geq 0, 2 < \sqrt{5} < 3)$$

であることが分かる。

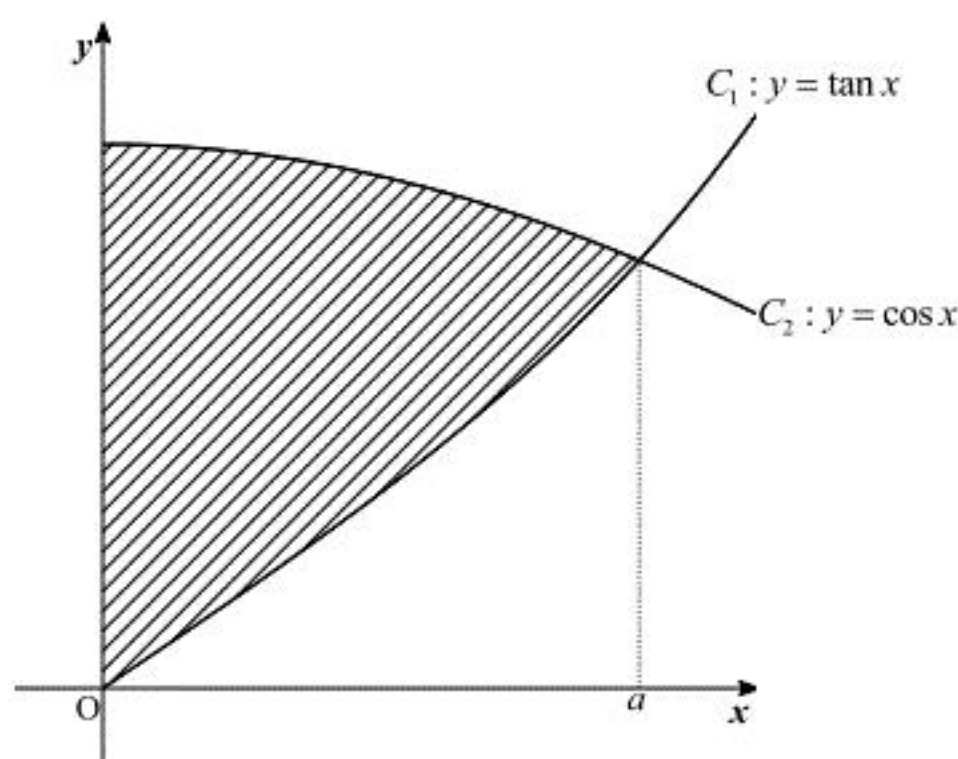
$$(\text{答}) \quad \sin a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

2.

$$\tan 0 = 0$$

$$\cos 0 = 1$$

であることと 1. の結果より、曲線 C_1, C_2 は以下のようにになっている。



求める面積を S とすると、 S は図の斜線部であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a (\cos x - \tan x) dx \\ &= \int_0^a \left(\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \left[\sin x + \log |\cos x| \right]_0^a \\ &= \sin a + \log |\cos a| - \sin 0 - \log |\cos 0| \\ &= \sin a + \log |\cos a| \end{aligned}$$

と表せる。ここで、①式より、

$$1 - \sin^2 a = \sin a$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\cos a| &= \sqrt{1 - \sin^2 a} \\ &= \sqrt{\sin a} \\ &= \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

と計算できるから、

$$\begin{aligned} S &= \sin a + \log |\cos a| \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \log \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$