

【1】

1.

与えられた関数 $f(x)$ について、

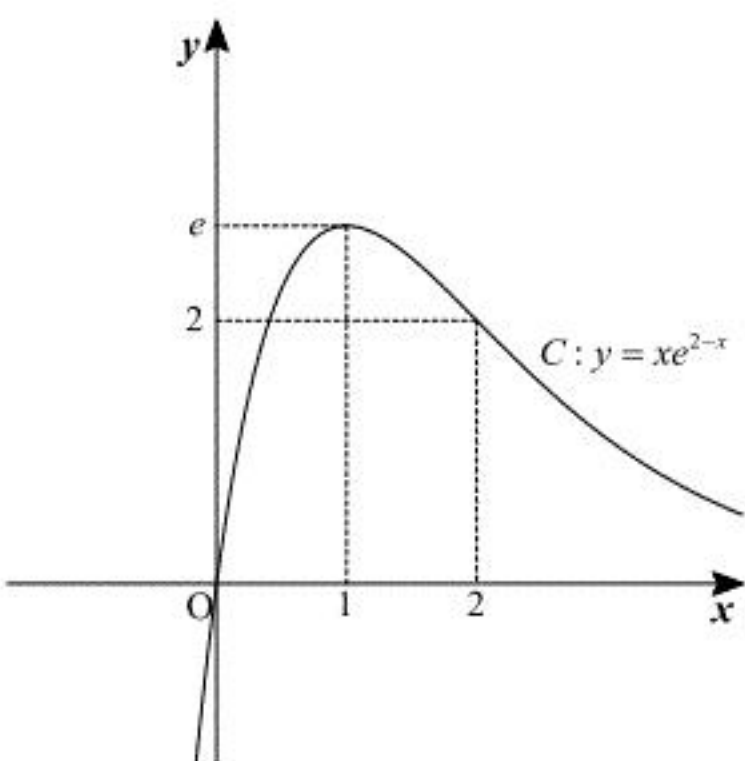
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot (-e^{2-x}) \\ &= (1-x)e^{2-x} \\ f''(x) &= -1 \cdot e^{2-x} + (1-x) \cdot (-e^{2-x}) \\ &= (x-2)e^{2-x} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= e \\ f(2) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つから、増減表より、曲線 $C: y = xe^{2-x}$ の概形は以下の図のように書ける。



(答) 前図

2.

1.より、

$$f'(x) = (1-x)e^{2-x}$$

であるから、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ での曲線 C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (1-t)e^{2-t}(x-t) + te^{2-t} \\ &= (1-t)e^{2-t}x + t^2e^{2-t} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。ここで、この接線の傾きを $g(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(t) &= (1-t)e^{2-t} \\ g'(t) &= (t-2)e^{2-t} \end{aligned}$$

より、 $g(t) = f'(t)$, $g'(t) = f''(t)$ である。したがって、1.の増減表より、 $t=2$ のとき $g(t)$ は最小値を取り、求める接線 ℓ の方程式は、 $\textcircled{1}$ において $t=2$ を代入して、

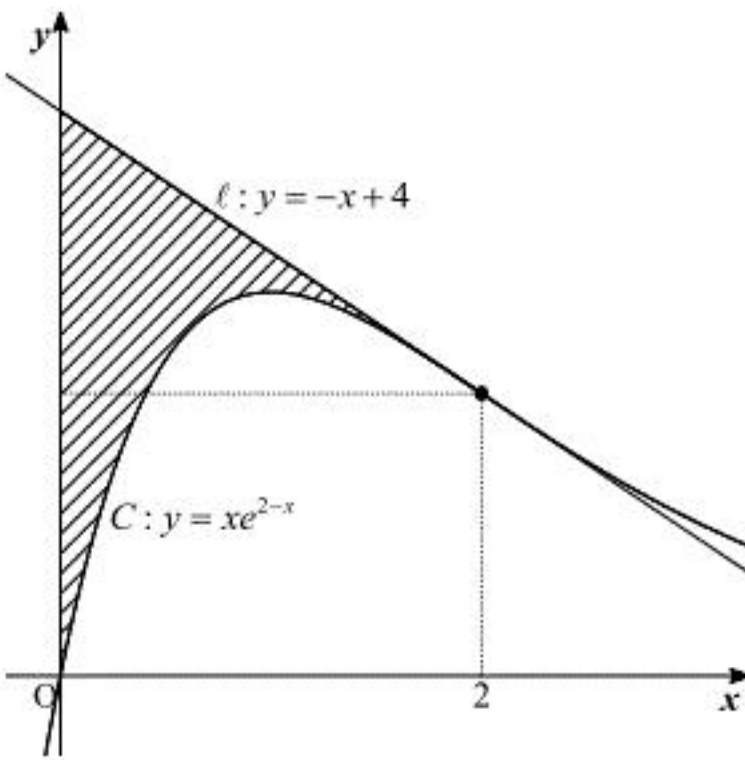
$$\begin{aligned} y &= (1-2)e^{2-2}x + 2^2e^{2-2} \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

であることが分かる。

(答) $y = -x + 4$

3.

曲線 C と直線 ℓ および y 軸は以下のような位置関係にある。



求める面積を S とすると、 S は図の斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (-x + 4 - xe^{2-x}) dx \\ &= \int_0^2 (-x + 4) dx + \int_0^2 x \cdot (e^{2-x})' dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^2 + \left[xe^{2-x} \right]_0^2 - \int_0^2 e^{2-x} dx \\ &= (-2 + 8) + 2 + \left[e^{2-x} \right]_0^2 \\ &= 9 - e^2 \end{aligned}$$

と計算することができる。

(答) $S = 9 - e^2$

[2]

1.

行列 O を,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (0+3)A + \{0 \cdot 3 - (-1) \cdot 2\}E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 - 3A + 2E &= O \end{aligned}$$

と計算することができる。

$$(\text{答}) \quad A^2 - 3A + 2E = O$$

2.

与式より、

$$E + A + A^2 + \cdots + A^n = a_n A + b_n E \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$E + A + A^2 + \cdots + A^n + A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} E \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。②式を変形し、①式を代入することで、

$$\begin{aligned} E + A + A^2 + \cdots + A^n + A^{n+1} &= a_{n+1} A + b_{n+1} E \\ \Leftrightarrow E + A(E + A + A^2 + \cdots + A^n) &= a_{n+1} A + b_{n+1} E \\ \Leftrightarrow E + A(a_n A + b_n E) &= a_{n+1} A + b_{n+1} E \\ \Leftrightarrow E + a_n A^2 + b_n A &= a_{n+1} A + b_{n+1} E \\ \Leftrightarrow E + a_n(3A - 2E) + b_n A &= a_{n+1} A + b_{n+1} E \quad (\because A^2 = 3A - 2E) \\ \Leftrightarrow (3a_n + b_n - a_{n+1})A &= (2a_n - 1 + b_{n+1})E \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ より、 A は E の定数倍ではないから、③式の両辺の係数は 0 であり、

$$\therefore \begin{cases} 3a_n + b_n - a_{n+1} = 0 & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ 1 - 2a_n + b_{n+1} = 0 & \cdots \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

を得る。④式において $n \rightarrow n+1$ としたものに⑤式を代入することで、

$$\begin{aligned} 3a_{n+1} + (1 - 2a_n) &= a_{n+2} \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n &= 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} + 1 &= 2(a_{n+1} - a_n + 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ より、 A は E の定数倍ではないことに注意して、

①において $n=1, 2$ とすることでそれぞれ、

$$\begin{aligned} E + A &= a_1 A + b_1 E \\ \Leftrightarrow (1 - a_1)A &= (b_1 - 1)E \\ \therefore a_1 &= 1, b_1 = 1 \\ E + A + A^2 &= a_2 A + b_2 E \\ \Leftrightarrow E + A + (3A - 2E) &= a_2 A + b_2 E \quad (\because A^2 = 3A - 2E) \\ \Leftrightarrow (4 - a_2)A &= (b_2 + 1)E \\ \therefore a_2 &= 4, b_2 = -1 \end{aligned}$$

であることが分かるから、⑥式は、

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} + 1 &= 2(a_{n+1} - a_n + 1) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n + 1 &= 2^{n-1}(a_2 - a_1 + 1) \\ \therefore a_{n+1} - a_n &= 2^{n-1} - 1 \quad (\because a_2 - a_1 + 1 = 4) \end{aligned}$$

と変形できる。従って、数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 1$ 、階差 $2^{n-1} - 1$ の階差数列であるため、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k-1} - 1) \\ &= 1 + 2^2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n - 1) \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

であることが分かる。これは $n=1$ の場合も適する。この結果と④式より、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= 1 - 2a_{n-1} \\ &= 1 - 2\{2^{(n-1)+1} - (n-1) - 2\} \\ &= -2^{n+1} + 2n + 3 \end{aligned}$$

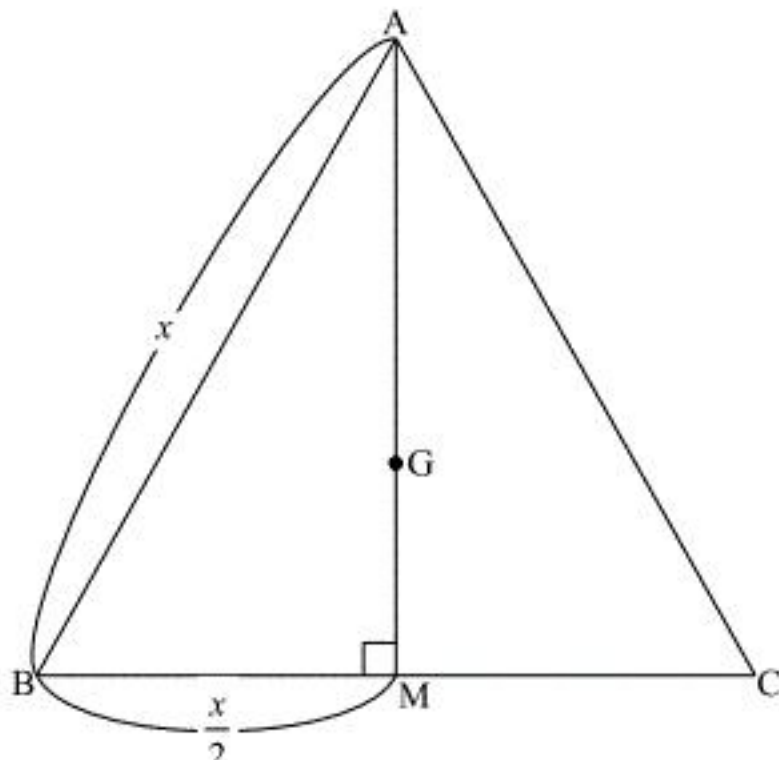
と計算できる。これは $n=1$ の場合も適する。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{n+1} - n - 2, b_n = -2^{n+1} + 2n + 3$$

[3]

1.

球の中心を点 P とおき、P から三角形 ABC に下ろした垂線の足を点 G とする。このとき、
 $OA = OB = OC$ より、G は三角形 ABC の重心と一致する。三角形 ABC が一辺の長さが x の正三角形であることから、三角形 ABC は以下の図のようになっている。



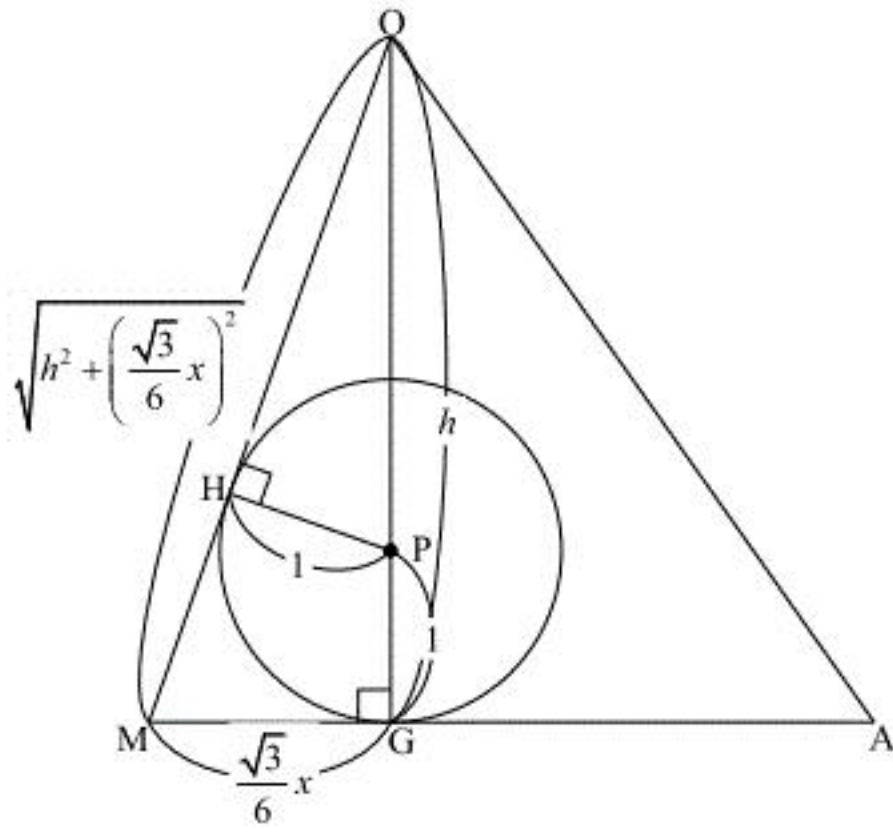
図のように辺 BC の中点を M とする。このとき、

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{AB^2 - BM^2} \\ &= \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

である。また、三点 A, G, M は同一直線上に存在し、かつ重心 G は線分 AM を 2:1 に内分する点であることから、

$$\begin{aligned} GM &= \frac{1}{3}AM \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}x \end{aligned}$$

であることが分かる。次に、三角錐 OABC を三角形 OAM を含む平面で切断することで得られる平面を考える。点 G は線分 AM 上に存在するためこの平面に含まれるから、線分 OG 上に存在する球の中心 P もこの平面に含まれる。従って、この平面は以下の図のようになっている。



図のように、球の中心 P から線分 OM に下ろした垂線の足を H とおく。このとき、 $PH = 1$ である。三角形 OHP と三角形 OGM について、

$$\begin{aligned} \angle HOP &= \angle GOM \\ \angle OHP &= \angle OGM = 90^\circ \end{aligned}$$

より、

$$\text{三角形 OHP} \sim \text{三角形 OGM}$$

であることが分かる。ここで、 $OG = h$ とすると、三角形 OGM についての三平方の定理より、

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{OG^2 + GM^2} \\ &= \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2} \end{aligned}$$

である。以上より、三角形 OHP と三角形 OGM の辺の比の関係より、

$$\begin{aligned} HP : GM &= OP : OM \\ \Leftrightarrow 1 : \frac{\sqrt{3}}{6}x &= h - 1 : \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2} &= \frac{\sqrt{3}}{6}x(h - 1) \\ \Leftrightarrow (x^2 - 12)h^2 - 2x^2h &= 0 \\ \Leftrightarrow h = 0, \frac{2x^2}{x^2 - 12} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $h > 0$ であるため、

$$\begin{aligned} h &= \frac{2x^2}{x^2 - 12} \\ x &> 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

を得る。以上より、三角錐 OABC の体積を V とすると、三角形 ABC の面積が、

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

と計算できることから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot h \\ &= \frac{\sqrt{3}x^4}{6(x^2 - 12)} \end{aligned}$$

であることが分かる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\sqrt{3}x^4}{6(x^2 - 12)} \quad (x > 2\sqrt{3})$$

2.

x の関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^4} \quad (x > 2\sqrt{3})$$

とおくと、

$$V = \frac{\sqrt{3}}{6f(x)}$$

と表せる。従って、 $f(x)$ が最大値をとるとき、 V は最小値をとる。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^3} + \frac{48}{x^5} \\ &= \frac{2}{x^5}(24 - x^2) \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2\sqrt{6} \quad (\because x > 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

である。従って、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$2\sqrt{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{6}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	最大値	$\searrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x = 2\sqrt{6}$ のときに最大値 $f(2\sqrt{6})$ をとることが分かる。従って、 V は

$x = 2\sqrt{6}$ で最小値をとり、その値は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{6f(2\sqrt{6})} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6 \cdot \frac{1}{48}} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

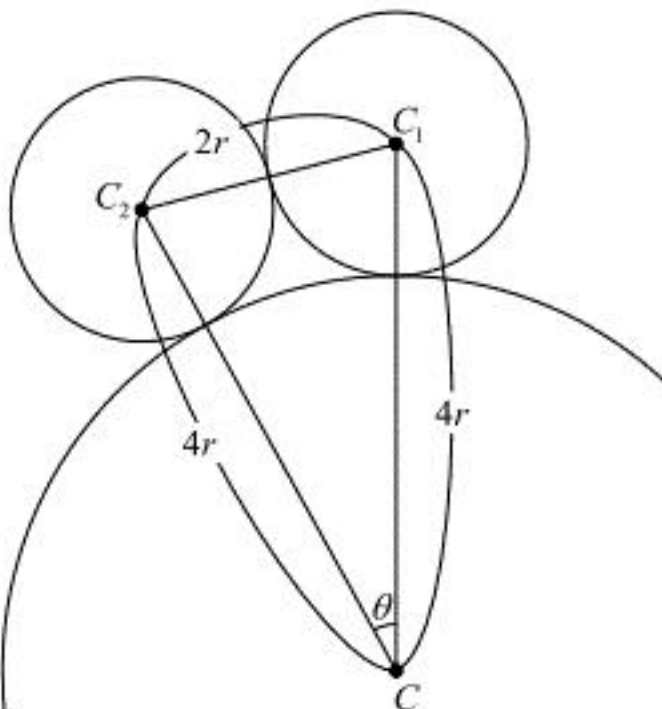
である。

$$(\text{答}) \quad V = 8\sqrt{3} \quad (x = 2\sqrt{6})$$

[4]

1.

以下の図のように、半径 R の円に外接している、互いに接する 2 つの小円を考える。ただし、半径 R の円の中心を C 、小円の中心を C_1, C_2 とする。また、 $\angle C_1 C C_2 = \theta$ とおく。



$R = 3r$ のとき、

$$\begin{aligned} CC_1 &= CC_2 = 4r \\ C_1 C_2 &= 2r \end{aligned}$$

であるから、三角形 $CC_1 C_2$ について余弦定理を用いることで、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(4r)^2 + (4r)^2 - (2r)^2}{2 \cdot 4r \cdot 4r} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

を得る。求める n が満たすべき条件は、

$$\begin{aligned} n\theta &\leq 2\pi < (n+1)\theta && \cdots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n+1} < \theta &\leq \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

である。このとき、 $n \geq 2$ より、

$$\frac{2\pi}{n} \leq \pi$$

であり、 $0 \leq t \leq \pi$ のとき、 $\cos t$ は単調減少関数であることから、 $\textcircled{1}$ の条件は、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{n} &\leq \cos \theta < \cos \frac{2\pi}{n+1} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{360^\circ}{n} &\leq \frac{7}{8} < \cos \frac{360^\circ}{n+1} && \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

であるから、与えられた表より、

$$\cos 29^\circ < \frac{7}{8} < \cos 28^\circ$$

が分かる。従って、

$$\cos \frac{360^\circ}{12} < \cos 29^\circ < \frac{15}{16} < \cos 28^\circ < \cos \frac{360^\circ}{12+1}$$

が成り立つことから、

$$n = 12$$

が $\textcircled{2}$ を満たすことが分かるから、これが求める n である。

(答) $n = 12$

2.

$$\begin{aligned} CC_1 &= CC_2 = R + r \\ C_1 C_2 &= 2r \end{aligned}$$

であるから、三角形 $CC_1 C_2$ について余弦定理を用いることで、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(R+r)^2 + (R+r)^2 - (2r)^2}{2 \cdot (R+r) \cdot (R+r)} \\ &= \frac{2(R+r)^2 - 2 \cdot 2r^2}{2(R+r)^2} \\ &= 1 - \frac{2r^2}{(R+r)^2} \end{aligned}$$

を得る。条件を満たす n に対し、

$$\begin{aligned} n\theta &\leq 2\pi < (n+1)\theta && \cdots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n+1} < \theta &\leq \frac{2\pi}{n} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{n} &\leq \cos \theta < \cos \frac{2\pi}{n+1} \quad (\because \frac{2\pi}{n} \leq \pi, \cos t \text{ は } 0 \leq t \leq \pi \text{ で単調減少}) \\ \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{n} &\leq 1 - \frac{2r^2}{(R+r)^2} < 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{n+1} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{n+1} &< \frac{r^2}{(R+r)^2} \leq \sin^2 \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

が成り立つため、

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{(R+r)^2} &\leq \sin^2 \frac{\pi}{n} \\ \therefore \frac{r}{R+r} &\leq \sin \frac{\pi}{n} \quad (\because \frac{r}{R+r} > 0, \sin \frac{\pi}{n} > 0) && \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。ここで、正の実数 t に対し、

$$\sin t < t$$

が成り立つため、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{r}{R+r} &\leq \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n} \\ \Rightarrow \frac{r}{R+r} &\leq \frac{\pi}{n} \\ \therefore n &\leq \pi \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \end{aligned}$$

であることが分かる。以上より、題意は示された。

(証明終)