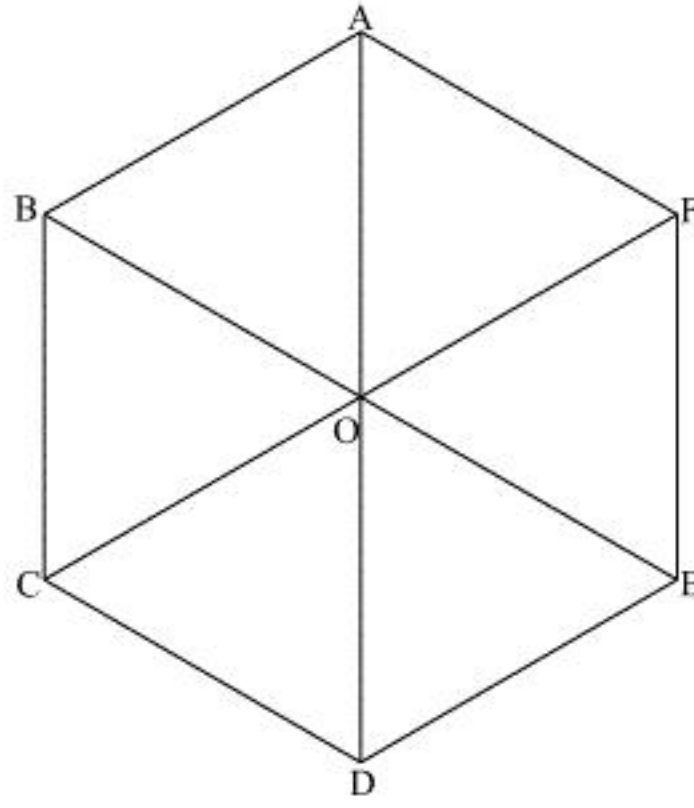


【1】

1.

以下の図のように、線分 AD, BE, CF の交点を点 O とする。



図より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} \\ &= \vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} \\ &= 2\vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AO} \\ &= 2\vec{a} + 2\vec{b} \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AF} \\ &= \vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

2.

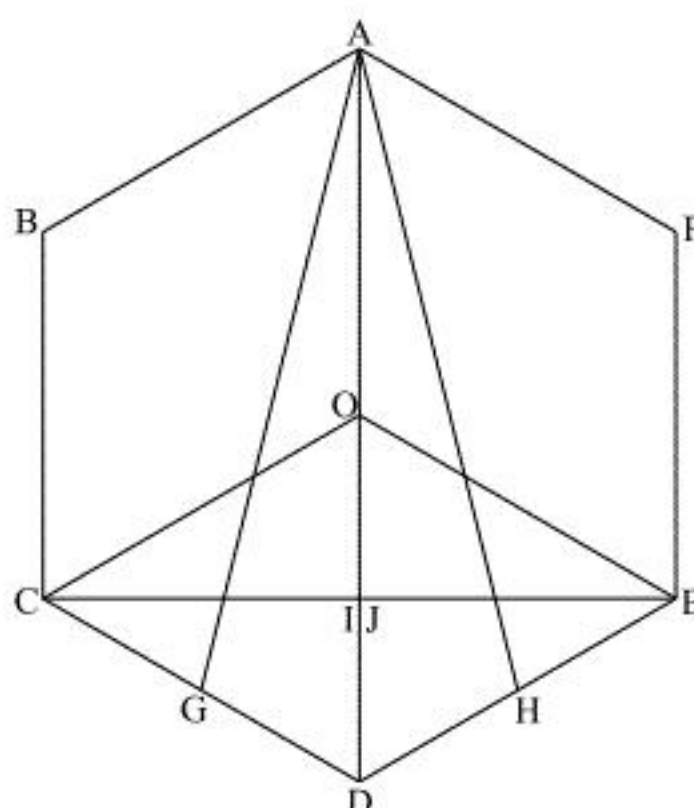
正六角形 ABCDEF の面積を S とおくと、題意より、四角形 ABCG と四角形 AFEH と四角形 AGDH の面積はすべて等しく $\frac{S}{3}$ であり、四角形 ABCD, AFED の面積はともに $\frac{S}{2}$ である。従って、三角形 ADG, ADH の面積はともに、

$$\frac{S}{2} - \frac{S}{3} = \frac{S}{6}$$

であることが分かる。正六角形 ABCDEF の面積は一辺の長さが 1 の正三角形 6 つ分の面積と等しいから、三角形 ADG, ADH の面積はともに、

$$\begin{aligned}\frac{S}{6} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

と計算できる。ここで、以下の図のように C, E から線分 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ I, J とすると、三角形 ADC, ADE は、底辺 AD、高さ CI, EJ の三角形と見なすことができる。



1. の図より、AD の長さは 2 であり、CI, EJ の大きさは一辺の長さが 1 の正三角形の高さ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

と等しいため、三角形 ADC, ADE の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と計算できる。以上より、線分 AG, AH はそれぞれ三角形 ADC, ADE の面積を 2 等分する線分であることが分かるから、

$$\begin{aligned}\text{CG} : \text{GD} &= \text{DH} : \text{HE} \\ &= 1 : 1\end{aligned}$$

である。従って、

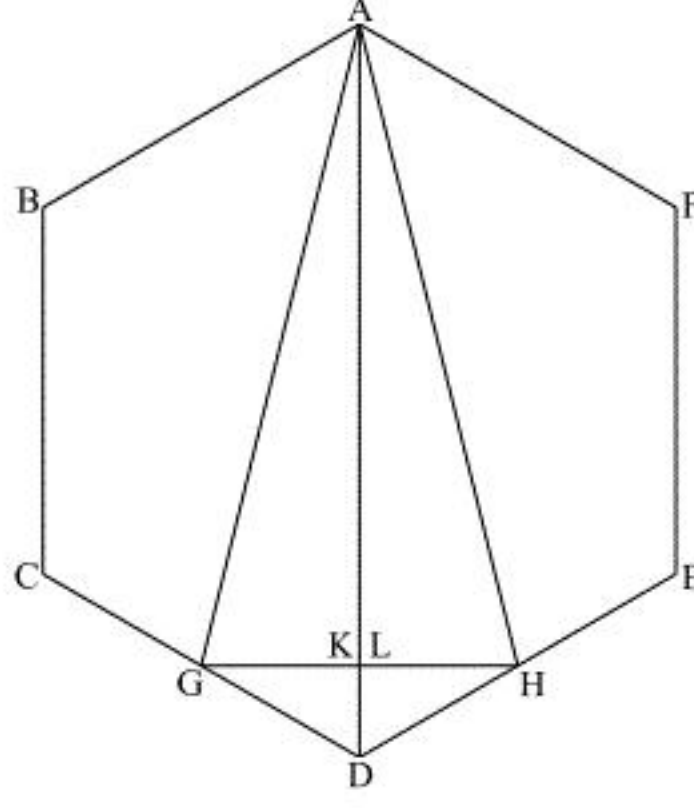
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{AH} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{1}{2}(2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

と計算することができる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AG} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}, \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$$

3.

以下の図のように G, H から線分 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ K, L とすると、三角形 ADG, ADH は、底辺 AD、高さ GK, HL の三角形と見なすことができる。



図は線分 AD について線対称であるため、点 K, L は一致する。また、 $\angle AKG = \angle ALH = 90^\circ$ であるから、G, K, L, H は同一直線上に存在する。2. より、三角形 ADG の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ であること

から、三角形 ADG の面積についての式から、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{GK}| \\ \therefore |\overrightarrow{GK}| &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\because |\overrightarrow{AD}| = 2)\end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GH}| &= 2|\overrightarrow{GK}| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

と計算することができる。また、 $\angle BAF = 120^\circ$ より、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

であることが分かるから、これと 2. の結果から、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AG}| &= \sqrt{\left|2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right|^2} \\ &= \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot 1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \cdot 1^2} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{AH}|$ であるため、三角形 AGH に余弦定理を用いることで、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\overrightarrow{AG}|^2 + |\overrightarrow{AH}|^2 - |\overrightarrow{GH}|^2}{2|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{AH}|} \\ &= \frac{\frac{13}{4} + \frac{13}{4} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} \\ &= \frac{23}{26}\end{aligned}$$

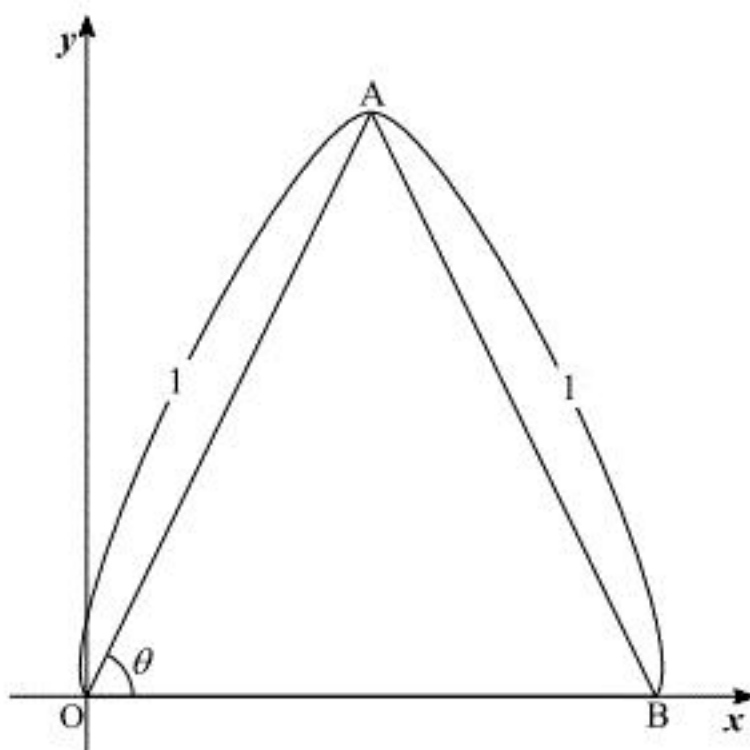
と計算することができる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{23}{26}$$

[2]

1.

題意より、二等辺三角形 AOB は以下の図のようになっている。



点 A は第 1 象限に存在するから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。図より、点 A の座標は、

$$A(\cos \theta, \sin \theta)$$

であると分かる。一方、 x 軸上の点 B の x 座標は点 A の x 座標の 2 倍であるから、点 B の座標は、

$$B(2 \cos \theta, 0)$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad A(\cos \theta, \sin \theta), B(2 \cos \theta, 0)$$

2.

$f(x)$ を、実数 a, b, c ($a \neq 0$) を用いて、

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおく。このとき、放物線 $y = f(x)$ が 3 点 O, A, B を通るという条件から、

$$\begin{cases} c = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a \cos^2 \theta + b \cos \theta + c = \sin \theta & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 4a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta + c = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。①を②, ③式に代入することで、

$$\begin{cases} a \cos^2 \theta + b \cos \theta = \sin \theta & \cdots \cdots \textcircled{2}' \\ 4a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3}' \end{cases}$$

を得る。③' - 2 × ②' より、

$$2a \cos^2 \theta = -2 \sin \theta$$

$$\therefore a = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta \neq 0 \right)$$

であることが分かり、これを③'に代入することで、

$$4 \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right) \cdot \cos^2 \theta + 2b \cos \theta = 0$$

$$\therefore b = 2 \tan \theta \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta \neq 0 \right)$$

を得る。以上より、

$$f(x) = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + 2(\tan \theta)x$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + 2(\tan \theta)x$$

3.

1.の図と 2.の結果より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2 \cos \theta} \left\{ -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + 2(\tan \theta)x \right\} dx \\ &= \left[-\frac{\sin \theta}{3 \cos^2 \theta} x^3 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x^2 \right]_0^{2 \cos \theta} \\ &= \frac{4}{3} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2 \sin 2\theta}{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{2 \sin 2\theta}{3}$$

4.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、

$$0 < \sin 2\theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 0 < \frac{2}{3} \sin 2\theta \leq \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < S \leq \frac{2}{3}$$

が成り立つ。従って、 S の最大値は

$$S = \frac{2}{3}$$

であり、このとき、

$$\sin 2\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最大値 } S = \frac{2}{3}$$

[3]

1.

題意より、各点の座標は、

$$\begin{aligned} P_1(1, 1) \\ Q_1(-1, 1) \\ P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ Q_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ P_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ Q_3\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ P_4\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\ Q_4\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \\ P_5\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \end{aligned}$$

と順次求めることができる。

$$(\text{答}) \quad P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), P_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), P_4\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right), P_5\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

2.

$$P_n(a_n \cos \theta_n, a_n \sin \theta_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおく。このとき、点 Q_n は点 P_n を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた点であるため、

$$Q_n\left(a_n \cos\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right), a_n \sin\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

と表すことができる。従って、点 P_{n+1} の座標は、点 Q_n の座標をそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍することで、

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{2}a_n \cos\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{2}a_n \sin\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

であることが分かる。ここで、 $\textcircled{1}$ より、

$$P_{n+1}(a_{n+1} \cos \theta_{n+1}, a_{n+1} \sin \theta_{n+1})$$

であるから、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。条件より、

$$P_1\left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

と表すことができるから、

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。以上 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、

$$\begin{cases} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \\ \theta_n = \frac{2n-1}{4}\pi \end{cases}$$

であることが分かるため、

$$P_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \cos \frac{2n-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \sin \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

と表せる。従って、 $\sin \frac{8k+1}{4}\pi = \sin \frac{\pi}{4}$ 、 $\cos \frac{8k+1}{4}\pi = \cos \frac{\pi}{4}$ に注意すれば、 P_{4k+1} の座標は、

$$\begin{aligned} P_{4k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+1)-1}} \cos \frac{2(4k+1)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+1)-1}} \sin \frac{2(4k+1)-1}{4}\pi\right) \\ \Leftrightarrow P_{4k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{16^k} \cos \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{16^k} \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ \therefore P_{4k+1}\left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right) \end{aligned}$$

と表せることが分かる。

$$(\text{答}) \quad P_{4k+1}\left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right)$$

3.

1.より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_1} &= (1, 1) \\ \overrightarrow{OP_2} &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{OP_3} &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ \overrightarrow{OP_4} &= \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\ \overrightarrow{OP_5} &= \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \end{aligned}$$

であることが分かる。また、 $\overrightarrow{OX_n}$ の定義より、

$$\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{OX_{n-1}} + \overrightarrow{OP_n}$$

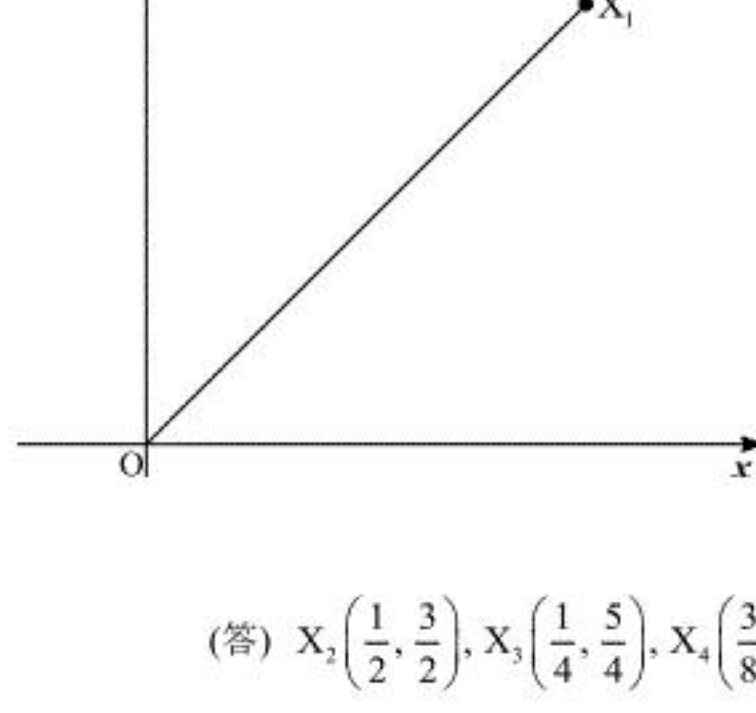
である。従って、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX_1} &= \overrightarrow{OP_1} \\ &= (1, 1) \\ \overrightarrow{OX_2} &= \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OP_2} \\ &= (1, 1) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{OX_3} &= \overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OP_3} \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) \\ \overrightarrow{OX_4} &= \overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OP_4} \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \\ \overrightarrow{OX_5} &= \overrightarrow{OX_4} + \overrightarrow{OP_5} \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) + \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \\ &= \left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right) \end{aligned}$$

と表すことができるから、点 X_2, X_3, X_4, X_5 の座標は、

$$X_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), X_3\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right), X_4\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right), X_5\left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right)$$

である。これらの点と線分 $OX_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5$ を座標平面上に図示すると以下のようになる。



$$(\text{答}) \quad X_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), X_3\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right), X_4\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right), X_5\left(\frac{7}{16}, \frac{19}{16}\right), \text{前図}$$

4.

2.より、

$$\overrightarrow{OP_n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \cos \frac{2n-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \sin \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_{4k+1}} &= \left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right) \\ \overrightarrow{OP_{4k+2}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+2)-1}} \cos \frac{2(4k+2)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+2)-1}} \sin \frac{2(4k+2)-1}{4}\pi\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 16^k} \cos \frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 16^k} \sin \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2 \cdot 16^k}, \frac{1}{2 \cdot 16^k}\right) \\ \overrightarrow{OP_{4k+3}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+3)-1}} \cos \frac{2(4k+3)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+3)-1}} \sin \frac{2(4k+3)-1}{4}\pi\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 16^k} \cos \frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 16^k} \sin \frac{5\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{4 \cdot 16^k}, -\frac{1}{4 \cdot 16^k}\right) \\ \overrightarrow{OP_{4k+4}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+4)-1}} \cos \frac{2(4k+4)-1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2^{(4k+4)-1}} \sin \frac{2(4k+4)-1}{4}\pi\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{8 \cdot 16^k} \cos \frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8 \cdot 16^k} \sin \frac{7\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{8 \cdot 16^k}, -\frac{1}{8 \cdot 16^k}\right) \end{aligned}$$

と表せる。従って、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_{4k+1}} + \overrightarrow{OP_{4k+2}} + \overrightarrow{OP_{4k+3}} + \overrightarrow{OP_{4k+4}} \\ = \left(\frac{1}{16^k}, \frac{1}{16^k}\right) + \left(-\frac{1}{2 \cdot 16^k}, \frac{1}{2 \cdot 16^k}\right) + \left(-\frac{1}{4 \cdot 16^k}, -\frac{1}{4 \cdot 16^k}\right) + \left(\frac{1}{8 \cdot 16^k}, -\frac{1}{8 \cdot 16^k}\right) \\ = \frac{1}{16^k} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\ = \frac{1}{16^k} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \end{aligned}$$

であることより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX_{4(k+1)}} &= \overrightarrow{OX_{4k}} + \overrightarrow{OP_{4k+1}} + \overrightarrow{OP_{4k+2}} + \overrightarrow{OP_{4k+3}} + \overrightarrow{OP_{4k+4}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OX_{4(k+1)}} - \overrightarrow{OX_{4k}} &= \frac{1}{16^k} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \end{aligned}$$

を得る。ここで、3.より、

$$\overrightarrow{OX_4} = \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX_{4k}} &= \overrightarrow{OX_4} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{16^i} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \frac{1}{16^{k-1}}}{1 - \frac{1}{16}} \left(\frac{3}{8}, \frac{9}{8}\right) \\ &= \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k} (2, 6) \end{aligned}$$

と計算できる。従って、

$$X_{4k} \left(2 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k}, 6 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k} \right)$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad X_{4k} \left(2 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k}, 6 \cdot \frac{16^k - 1}{5 \cdot 16^k} \right)$$

〔4〕

1.

与えられた関数 $f(x)$ について、

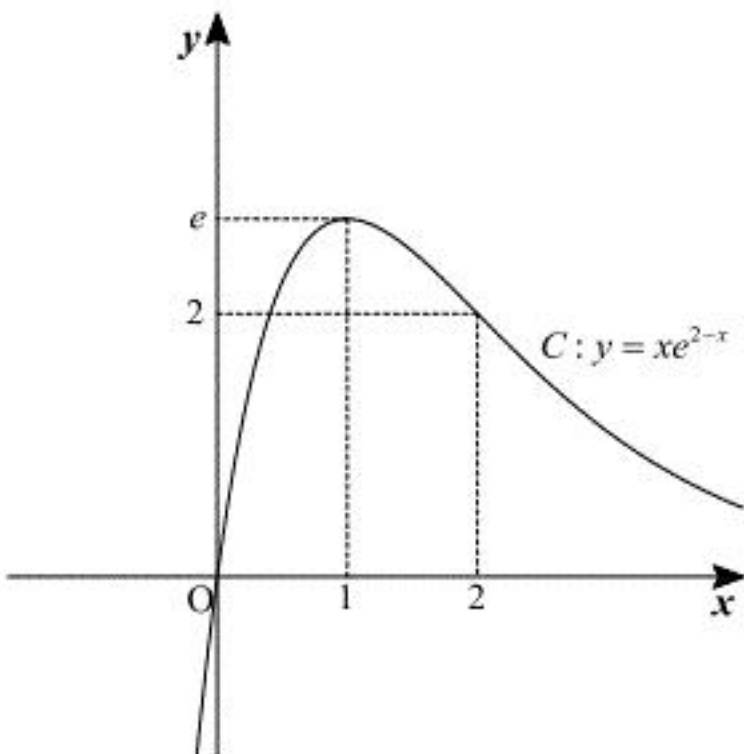
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot (-e^{2-x}) \\ &= (1-x)e^{2-x} \\ f''(x) &= -1 \cdot e^{2-x} + (1-x) \cdot (-e^{2-x}) \\ &= (x-2)e^{2-x} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	極大値	↘	変曲点	↘

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= e \\ f(2) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つから、増減表より、曲線 $C: y = xe^{2-x}$ の概形は以下の図のように書ける。



(答) 前図

2.

1.より、

$$f'(x) = (1-x)e^{2-x}$$

であるから、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ での曲線 C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (1-t)e^{2-t}(x-t) + te^{2-t} \\ &= (1-t)e^{2-t}x + t^2e^{2-t} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。ここで、この接線の傾きを $g(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(t) &= (1-t)e^{2-t} \\ g'(t) &= (t-2)e^{2-t} \end{aligned}$$

より、 $g(t) = f'(t)$, $g'(t) = f''(t)$ である。したがって、1.の増減表より、 $t=2$ のとき $g(t)$ は最小値を取り、求める接線 ℓ の方程式は、 $\textcircled{1}$ において $t=2$ を代入して、

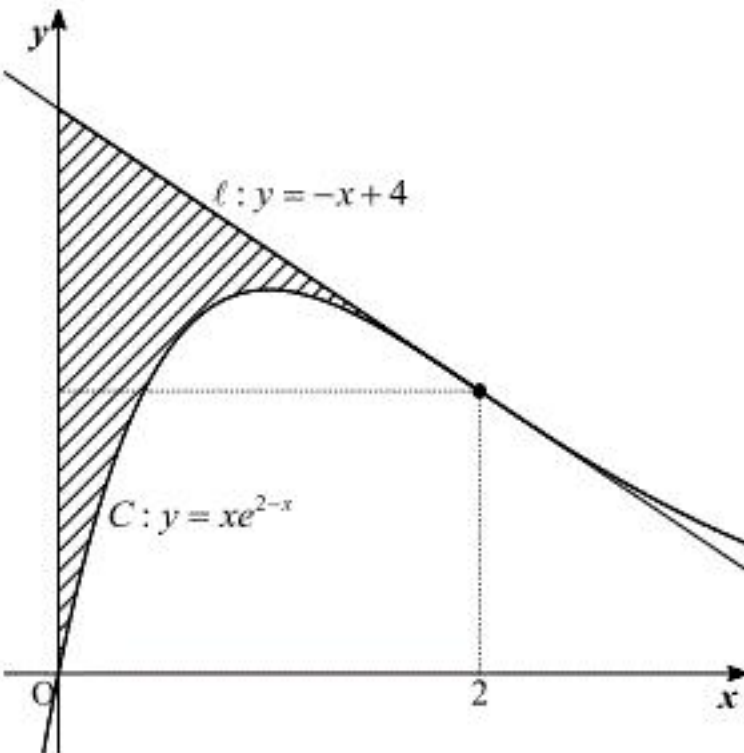
$$\begin{aligned} y &= (1-2)e^{2-2}x + 2^2e^{2-2} \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

であることが分かる。

(答) $y = -x + 4$

3.

曲線 C と直線 ℓ および y 軸は以下のような位置関係にある。



求める面積を S とすると、 S は図の斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (-x + 4 - xe^{2-x}) dx \\ &= \int_0^2 (-x + 4) dx + \int_0^2 x \cdot (e^{2-x})' dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^2 + \left[xe^{2-x} \right]_0^2 - \int_0^2 e^{2-x} dx \\ &= (-2 + 8) + 2 + \left[e^{2-x} \right]_0^2 \\ &= 9 - e^2 \end{aligned}$$

と計算することができる。

(答) $S = 9 - e^2$