

〔1〕

1.

問題文より

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2b_{n+1} = a_n + 3b_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。②を変形すると

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{2}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= (2a_n + b_n) + \left(\frac{a_n + 3b_n}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2}(a_n + b_n) \\ &= \frac{5}{2}c_n \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad c_{n+1} = \frac{5}{2}c_n$$

2.

$c_1 = a_1 + b_1 = 3$ と 1.の結果から、数列 $\{c_n\}$ は初項 3、公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列である。よって、

$$c_n = 3 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad c_n = 3 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}$$

3.

①から②を引くと

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n - 2b_n$$

となる。よって数列 $\{a_n - 2b_n\}$ は定数列であり、任意の自然数 n に対して

$$a_n - 2b_n = a_1 - 2b_1 = -3$$

である。一方、2.の結果より

$$a_n + b_n = 3 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}$$

であるから、これらを解くと、

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} - 1 \\ b_n &= \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

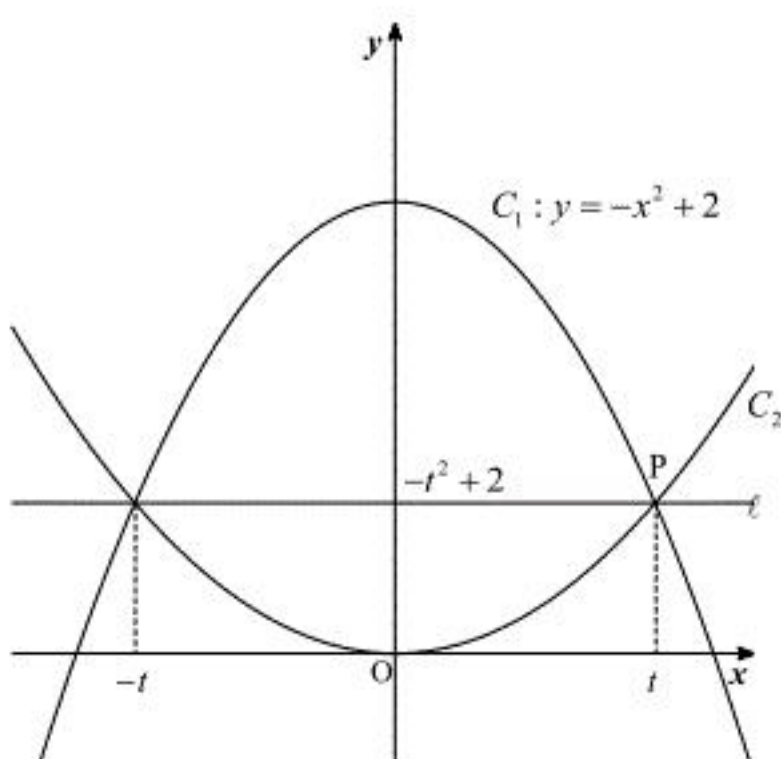
を得る。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} - 1$$

$$b_n = \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} + 1$$

〔2〕

1.



C_2 は y 軸を軸とし原点を頂点とする放物線であるから、 C_2 の方程式は、実数 a を用いて

$$y = ax^2$$

とかける。これが $P(t, -t^2 + 2)$ を通るので

$$-t^2 + 2 = at^2$$

となり、 $t > 0$ より

$$a = \frac{2 - t^2}{t^2}$$

である。したがって、 C_2 の方程式は

$$y = \frac{2 - t^2}{t^2}x^2$$

となる。

$$(答) \quad y = \frac{2 - t^2}{t^2}x^2$$

2.

l の方程式は

$$y = -t^2 + 2$$

である。グラフより、求める面積は

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_{-t}^t \left\{ (-t^2 + 2) - \frac{2 - t^2}{t^2}x^2 \right\} dx \\ &= \frac{2 - t^2}{t^2} \int_{-t}^t (t - x)(x + t) dx \\ &= \frac{2 - t^2}{t^2} \cdot \frac{1}{6} \{ t - (-t) \}^3 \\ &= \frac{4}{3} t (2 - t^2) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S_2(t) = \frac{4}{3} t (2 - t^2)$$

3.

$S_2(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} S_2'(t) &= \frac{4}{3} (2 - 3t^2) \\ &= -4 \left(t - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \left(t + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \end{aligned}$$

となるので、 $0 < t < \sqrt{2}$ の範囲で増減表をかくと以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	$\sqrt{2}$
$S_2'(t)$		+	0	-	
$S_2(t)$		↗		↘	

これより、 $S_2(t)$ は $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ で最大値をとり、その値は

$$S_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{6}}{27}$$

である。

$$(答) \quad t = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{16\sqrt{6}}{27}$$

4.

グラフより、 $S_1(t)$ は

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_{-t}^t \{ (-x^2 + 2) - (-t^2 + 2) \} dx \\ &= - \int_{-t}^t (x - t)(x + t) dx \\ &= \frac{1}{6} \{ t - (-t) \}^3 \\ &= \frac{4}{3} t^3 \end{aligned}$$

となる。これが、 $S_2(t)$ と等しくなるとき

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_2(t) \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} t^3 &= \frac{4}{3} t (2 - t^2) \\ \Leftrightarrow t(t^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t(t - 1)(t + 1) &= 0 \\ \therefore t &= 0, \pm 1 \end{aligned}$$

が得られるが、 $0 < t < \sqrt{2}$ であるから

$$t = 1$$

となる。

$$(答) \quad t = 1$$

〔3〕

1.

$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ であり, $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角は $\angle\text{BAD}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle\text{BAD} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

2.

$\overrightarrow{\text{AP}}$ は直線 BC 上にあるので, 実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AP}} &= \overrightarrow{\text{AB}} + s\overrightarrow{\text{BC}} \\ &= \vec{a} + s\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。BC $\perp$ AP より, $\overrightarrow{\text{AP}}, \overrightarrow{\text{BC}}$ の内積は 0 になるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AP}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{a} + s\vec{b}) \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 + 9s &= 0 \\ \therefore s &= -\frac{2}{9}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{\text{AP}} = \vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}$$

とわかる。 $\overrightarrow{\text{AQ}}$ は直線 BD 上にあるので, 実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AQ}} &= t\overrightarrow{\text{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\text{AD}} \\ &= t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。BD $\perp$ AQ より, $\overrightarrow{\text{AQ}}, \overrightarrow{\text{BD}}$ の内積は 0 になるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AQ}} \cdot \overrightarrow{\text{BD}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -t|\vec{a}|^2 + (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4t + 2(2t-1) + 9(1-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow -9t + 7 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{\text{AQ}} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$$

とわかる。

(答) $\overrightarrow{\text{AP}} = \vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}$

$$\overrightarrow{\text{AQ}} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$$

3.

2.の結果より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{AP}}|^2 &= \left(\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}\right)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 \\ &= 4 - \frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{4}{81} \cdot 9 \\ &= \frac{32}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\text{AP}}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{AQ}}|^2 &= \left(\frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}\right)^2 \\ &= \frac{49}{81}|\vec{a}|^2 + \frac{28}{81}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{49}{81} \cdot 4 + \frac{28}{81} \cdot 2 + \frac{4}{81} \cdot 9 \\ &= \frac{32}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\text{AQ}}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

となる。

(答) $|\overrightarrow{\text{AP}}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$|\overrightarrow{\text{AQ}}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

4.

2.の結果より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{PQ}}|^2 &= |\overrightarrow{\text{AQ}} - \overrightarrow{\text{AP}}|^2 \\ &= \left(-\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 (-\vec{a} + 2\vec{b})^2 \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 (|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot (4 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9) \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot 32\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\text{PQ}}| = \frac{2}{9}\sqrt{32} = \frac{8\sqrt{2}}{9}$$

となる。

(答) $|\overrightarrow{\text{PQ}}| = \frac{8\sqrt{2}}{9}$

〔4〕

1.

円の中心を (a, b) とする。円の半径は r であるから、円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

と表せる。また、放物線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

であるから、円の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - b\right)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - (b-1)x^2 - 2ax + (a^2 + b^2 - r^2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。円と放物線が2点で接するとき、この方程式が2個の重解 α, β を持つので、定数 c を用いて、

$$\frac{1}{4}x^4 - (b-1)x^2 - 2ax + (a^2 + b^2 - r^2) = c(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

とかける。4次の項の係数を比較すると $c = \frac{1}{4}$ である。そこで、両辺4倍して3次以下の係数比較をすると、

$$\begin{cases} 0 = -2(\alpha + \beta) \\ -4(b-1) = \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 \\ -8a = -2(\alpha + \beta)\alpha\beta \\ 4(a^2 + b^2 - r^2) = \alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

となる。1番目の式より、 $\beta = -\alpha$ であるから、2番目以降の式に代入して、

$$\begin{cases} -4(b-1) = -2\alpha^2 \\ -8a = 0 \\ 4(a^2 + b^2 - r^2) = \alpha^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 2(b-1) \\ a = 0 \\ 4(b^2 - r^2) = \{2(b-1)\}^2 \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} 4(b^2 - r^2) &= \{2(b-1)\}^2 \\ \Leftrightarrow 4b^2 - 4r^2 &= 4b^2 - 8b + 4 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{r^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

であるから、円の中心は $(a, b) = \left(0, \frac{r^2 + 1}{2}\right)$ となる。また、接点の座標は、 $\beta = -\alpha$ かつ

$\alpha^2 = 2(b-1)$ より、

$$\begin{aligned} \left(\pm\alpha, \frac{1}{2}(\pm\alpha)^2\right) &= \left(\pm\sqrt{2(b-1)}, b-1\right) \\ &= \left(\pm\sqrt{r^2-1}, \frac{r^2-1}{2}\right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 中心 } \left(0, \frac{r^2+1}{2}\right), \text{ 接点 } \left(\pm\sqrt{r^2-1}, \frac{r^2-1}{2}\right)$$

2.

円 C_n の半径を r_n とする。 $n \geq 2$ において、円 C_n は放物線と2点で接するので、2の結果より円の中心の座標は $\left(0, \frac{r_n^2+1}{2}\right)$ となる。これは、 $n=1$ おいても、半径1、中心 $(0, 1)$ であることから成り立つ。円 C_n と円 C_{n+1} は外接するので

$$\begin{aligned} \frac{r_{n+1}^2+1}{2} - \frac{r_n^2+1}{2} &= r_{n+1} + r_n \\ \Leftrightarrow r_{n+1}^2 - r_n^2 &= 2(r_{n+1} + r_n) \\ \Leftrightarrow (r_{n+1} - r_n)(r_{n+1} + r_n) - 2(r_{n+1} + r_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow (r_{n+1} - r_n - 2)(r_{n+1} + r_n) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $r_{n+1} + r_n \neq 0$ であるから

$$r_{n+1} = r_n + 2$$

となる。数列 $\{r_n\}$ は初項1、公差2の等差数列であるから

$$r_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad r_n = 2n-1$$

〔5〕

1.

0 でない実数 t を用いて、接点を $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ と表すと

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

より、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{t^2}(x-t) + \frac{1}{t} \\ &= -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} \end{aligned}$$

となる。これが、 $A(a, 0)$ を通るので

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{a}{t^2} + \frac{2}{t} \\ \therefore t &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

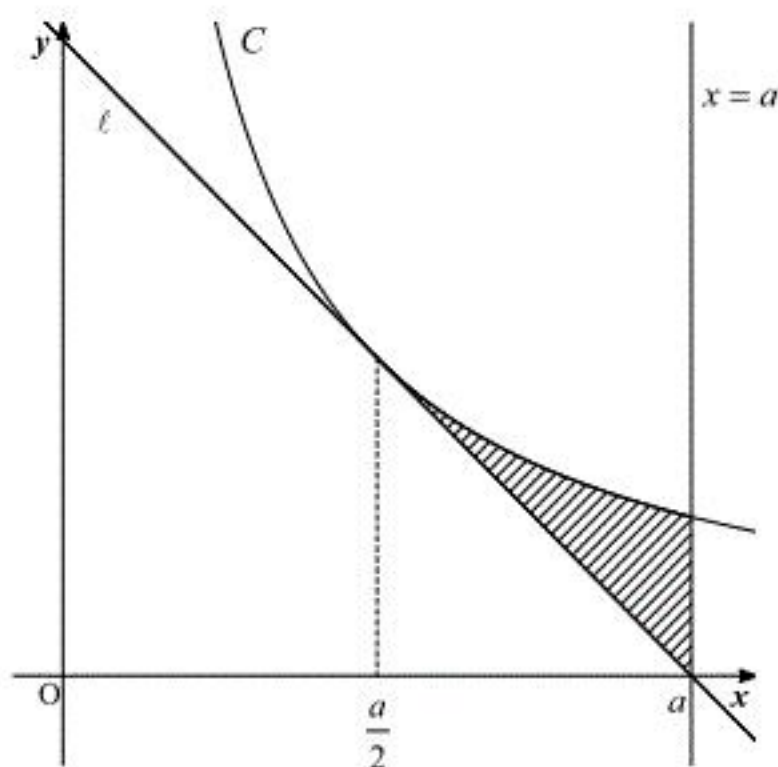
とわかる。これを接線の方程式に代入して

$$y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a}$$

が得られる。

(答) $y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a}$

2.



グラフより、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^a \left\{ \frac{1}{x} - \left(-\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a} \right) \right\} dx &= \left[\log|x| + \frac{2}{a^2}x^2 - \frac{4}{a}x \right]_{\frac{a}{2}}^a \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 2 - \frac{1}{2}$