

〔1〕

1.

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。①, ②, ③の辺々を足し合わせると

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n)$$

となるので, 数列 $\{a_n + b_n + c_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 + c_1 = 6$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって

$$a_n + b_n + c_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n + b_n + c_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2.

①-②より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{1}{4}(a_n - b_n)$$

となるので, 数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列である。よって

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。また, ①-③より

$$a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{4}(a_n - c_n)$$

となるので, 数列 $\{a_n - c_n\}$ は初項 $a_1 - c_1 = 2$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列である。よって

$$a_n - c_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{6}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n - b_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$a_n - c_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

3.

④+⑤+⑥より

$$3a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

が得られる。これと, ⑤, ⑥より

$$\begin{aligned} b_n &= a_n - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left\{ 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= a_n - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left\{ 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

[2]

1. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}, \overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とすると

$$|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1, \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0$$

である。ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a}) \\ &= 1-1 \\ &= 0 \\ \overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AD} &= (\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{d}-\vec{a}) \\ &= 1-1 \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから、OFは平面ACDに垂直である。よって、線分OFと平面ACDの交点をIとすると、Iは直線OF上にあるので実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OI}=k\overrightarrow{OF}=k\vec{a}+k\vec{c}+k\vec{d}$$

と表せる。Iは平面ACD上にもあるので、

$$k+k+k=1$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$$

が得られる。また、線分OFと平面BEGの交点をJとすると、図形の対称性より

$$\overrightarrow{OJ}=(1-k)\overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OF}$$

と表すことができる。ここで、 $|\overrightarrow{OF}|=\sqrt{3}$ であるから、点Pが線分OI, IJ, JF上にある場合、つ

まり $0\leq x<\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\leq x<\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\sqrt{3}$ の場合に分けて考える。

[1] $0\leq x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

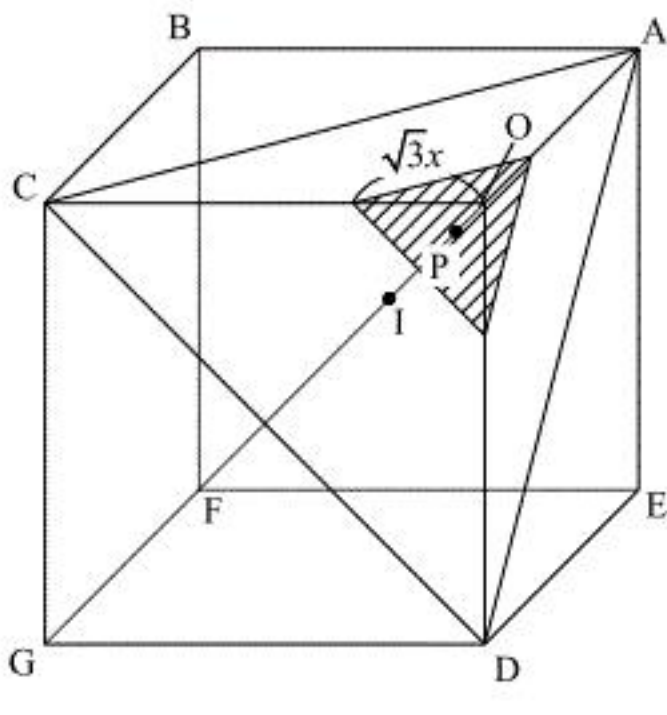
切り口は、下図のように、Oを相似の中心として△ACDと相似な正三角形になる。切り口と△ACDの相似比はOP:OI= $x:\frac{\sqrt{3}}{3}$ であるから、切り口の正三角形の1頂点からOまでの距離は、

$$1\cdot\frac{3x}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}x$$

となる。よって正三角形の一辺は $\sqrt{6}x$ であり、

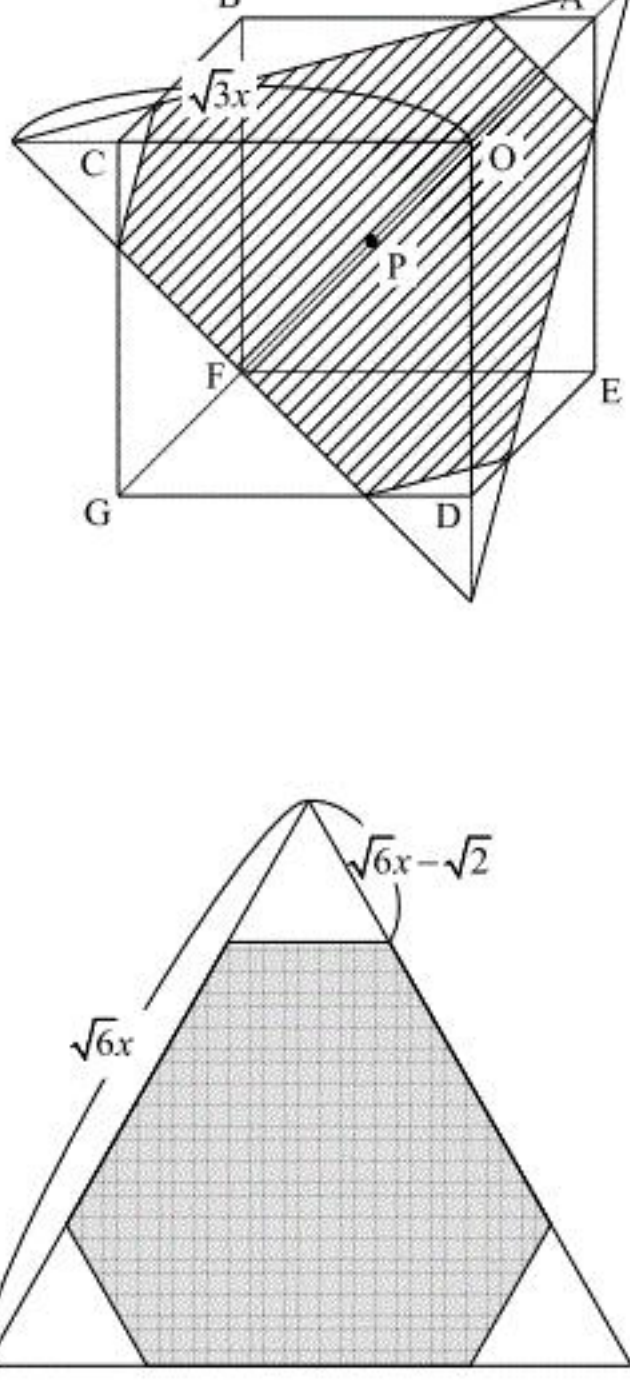
$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}x\cdot\sqrt{6}x\cdot\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\end{aligned}$$

を得る。



[2] $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

切り口は下図のようになる。



1辺が $\sqrt{6}x$ の正三角形から1辺が $\sqrt{6}x-\sqrt{2}$ の正三角形を3つのぞいたものであるから

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{6}x)^2\sin\frac{\pi}{3}-3\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{6}x-\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{3} \\ &= -3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。

[3] $\frac{2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\sqrt{3}$ のとき

図形の対称性から、[1]の x を $(\sqrt{3}-x)$ におきかえたものであるから

$$S(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})^2$$

となる。

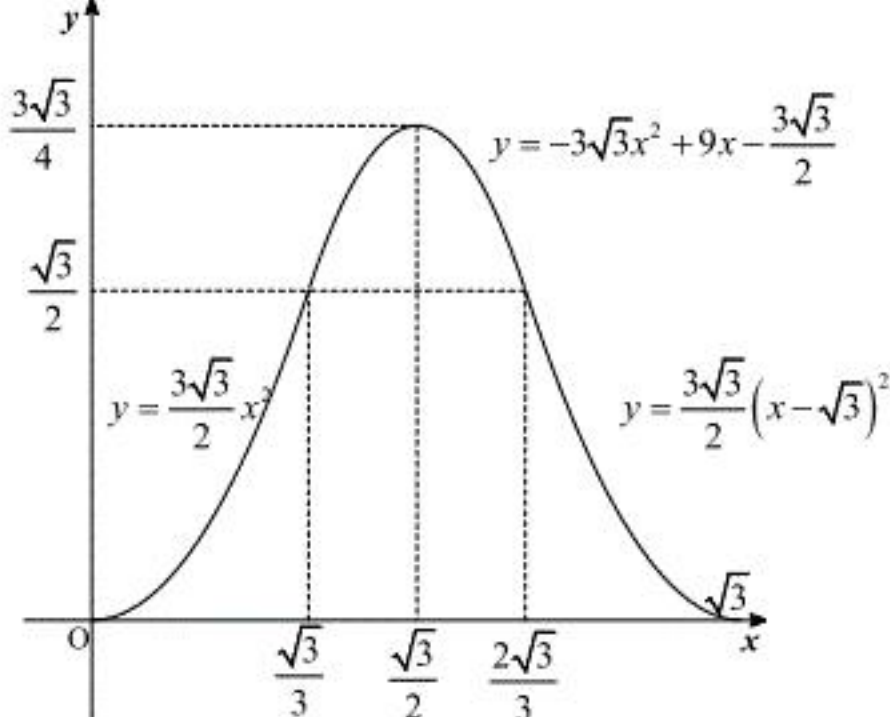
以上[1], [2], [3]より

$$S(x)=\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 & (0\leq x<\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}) \\ -3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2} & (\frac{\sqrt{3}}{3}\leq x<\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}) \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})^2 & (\frac{2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\sqrt{3} \text{ のとき})\end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) S(x)=\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 & (0\leq x<\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}) \\ -3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2} & (\frac{\sqrt{3}}{3}\leq x<\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}) \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})^2 & (\frac{2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\sqrt{3} \text{ のとき})\end{cases}$$

2. 1.よりグラフは以下のようになる。



(答) 前図

3. 2.の結果より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} S(x)dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2dx + \int_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \left(-3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} + \left[-\sqrt{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_0^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} S(x)dx = \frac{5}{6}$$

〔3〕

1.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると

$$|\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3, \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ = 3$$

である。また、G は三角形 ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$$

である。よって

$$\begin{aligned} f(G) &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AG} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \left\{ \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{b} \right\} + \left\{ \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{b} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c} \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c} \right\} \cdot \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -\frac{1}{3}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}|\vec{c}|^2 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 \\ &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

が導かれる。

$$(\text{答}) \quad f(G) = -\frac{10}{3}$$

2.

$\overrightarrow{AP} = \vec{p}$ として、 $f(P)$ を変形すると

$$\begin{aligned} f(P) &= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= \vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) + (\vec{p} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) + (\vec{p} - \vec{c}) \cdot \vec{p} \\ &= 3|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 3|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + 3 \\ &= 3\left| \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \right|^2 - \frac{1}{3}|\vec{b} + \vec{c}|^2 + 3 \\ &= 3\left| \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \right|^2 - \frac{1}{3}(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2) + 3 \\ &= 3\left| \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \right|^2 - \frac{10}{3} \end{aligned}$$

となる。 $f(P) = \frac{8}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} f(P) &= \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow 3\left| \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \right|^2 - \frac{10}{3} &= \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow \left| \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \right|^2 &= 2 \\ \therefore \left| \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \right| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから、点 P は重心 G を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

(証明終)

3.

2. の過程より

$$f(P) = 3\left| \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \right|^2 - \frac{10}{3} \geq -\frac{10}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(P) \geq -\frac{10}{3}$$

〔4〕

1.

$y = e^x$ の導関数は

$$y' = e^x$$

であるから、点 (t, e') における C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= e'(x-t) + e' \\ &= e'x + (1-t)e' \end{aligned}$$

である。この接線が原点を通るとき

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + (1-t)e' \\ \Leftrightarrow e'(1-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-t &= 0 \quad (\because e' > 0) \\ \Leftrightarrow t &= 1 \end{aligned}$$

となるから、求める接線の方程式は

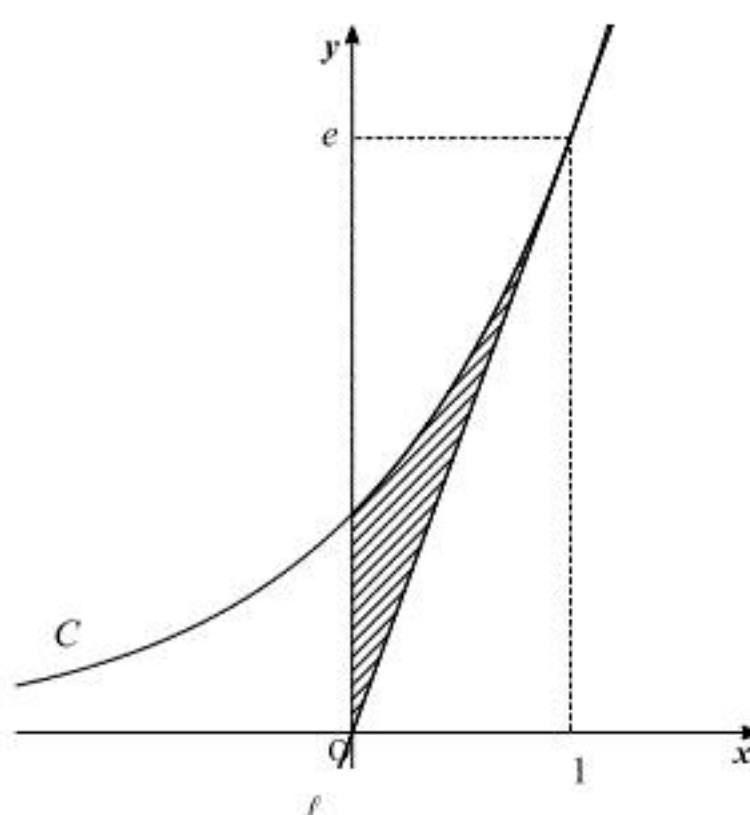
$$y = ex$$

である。

(答) $y = ex$

2.

1.より C と ℓ の交点の座標は $(1, e)$ である。よって、図形 D は下図斜線部である。



(答) 前図斜線部

3.

求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx - \frac{1}{3} \cdot e^2 \pi \cdot 1 &= \pi \int_0^1 e^{2x} dx - \frac{\pi e^2}{3} \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{\pi e^2}{3} \\ &= \frac{\pi}{6} (e^2 - 3) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{6} (e^2 - 3)$

4.

部分積分を用いると

$$\begin{aligned} I &= \int \log y dy \\ &= \int y' \log y dy \\ &= y \log y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= y \log y - y + C_1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 C_1 は積分定数である。また、 J は I を用いることで

$$\begin{aligned} J &= \int (\log y)^2 dy \\ &= \int y' (\log y)^2 dy \\ &= y (\log y)^2 - \int y \cdot 2 \log y \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= y (\log y)^2 - 2 \int \log y dy \\ &= y (\log y)^2 - 2I \\ &= y (\log y)^2 - 2(y \log y - y + C_1) \\ &= y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y + C_2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 C_2 は積分定数である。

(答) $I = y \log y - y + C_1$

$$J = y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y + C_2$$

(ただし、 C_1, C_2 は積分定数である。)

5.

C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ \Leftrightarrow x &= \log y \end{aligned}$$

であるから、4.の結果を利用すると、求める体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot e - \pi \int_1^e (\log y)^2 dy &= \frac{1}{3} \pi e - \pi \left[y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y \right]_1^e \\ &= \frac{1}{3} \pi e - \pi (e - 2) \\ &= \frac{2\pi}{3} (3 - e) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2\pi}{3} (3 - e)$