

〔1〕

1.

問題文より

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2b_{n+1} = a_n + 3b_n \quad \dots \textcircled{2}$$

である。②を変形すると

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{2}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= (2a_n + b_n) + \left(\frac{a_n + 3b_n}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2}(a_n + b_n) \\ &= \frac{5}{2}c_n \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad c_{n+1} = \frac{5}{2}c_n$$

2.

$c_1 = a_1 + b_1 = 3$ と 1.の結果から、数列 $\{c_n\}$ は初項 3、公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列である。よって、

$$c_n = 3 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad c_n = 3 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}$$

3.

①から②を引くと

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n - 2b_n$$

となる。よって数列 $\{a_n - 2b_n\}$ は定数列であり、任意の自然数 n に対して

$$a_n - 2b_n = a_1 - 2b_1 = -3$$

である。一方、2.の結果より

$$a_n + b_n = 3 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}$$

であるから、これらを解くと、

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} - 1$$

$$b_n = \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} + 1$$

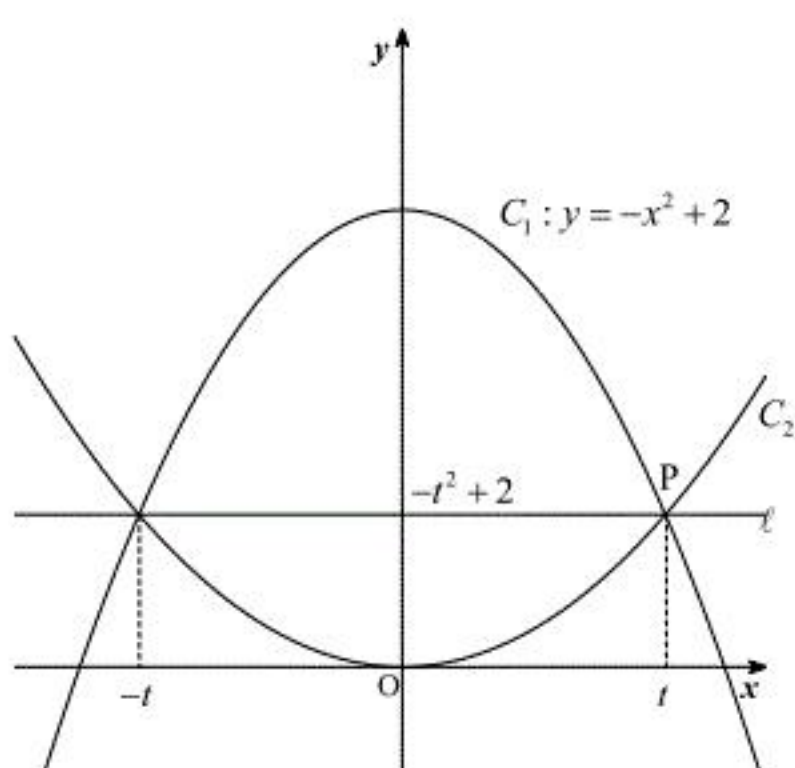
を得る。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} - 1$$

$$b_n = \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} + 1$$

〔2〕

1.



C_2 は y 軸を軸とし原点を頂点とする放物線であるから、 C_2 の方程式は、実数 a を用いて

$$y = ax^2$$

とかける。これが $P(t, -t^2 + 2)$ を通るので

$$-t^2 + 2 = at^2$$

となり、 $t > 0$ より

$$a = \frac{2-t^2}{t^2}$$

である。したがって、 C_2 の方程式は

$$y = \frac{2-t^2}{t^2}x^2$$

となる。

$$(答) \ y = \frac{2-t^2}{t^2}x^2$$

2.

ℓ の方程式は

$$y = -t^2 + 2$$

である。グラフより、求める面積は

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_{-t}^t \left\{ (-t^2 + 2) - \frac{2-t^2}{t^2}x^2 \right\} dx \\ &= \frac{2-t^2}{t^2} \int_{-t}^t (t-x)(x+t) dx \\ &= \frac{2-t^2}{t^2} \cdot \frac{1}{6} \{ t - (-t) \}^3 \\ &= \frac{4}{3} t (2-t^2) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \ S_2(t) = \frac{4}{3} t (2-t^2)$$

3.

$S_2(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} S_2'(t) &= \frac{4}{3} (2-3t^2) \\ &= -4 \left(t - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \left(t + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \end{aligned}$$

となるので、 $0 < t < \sqrt{2}$ の範囲で増減表をかくと以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	$\sqrt{2}$
$S_2'(t)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$S_2(t)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$

これより、 $S_2(t)$ は $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ で最大値をとり、その値は

$$S_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{6}}{27}$$

である。

$$(答) \ t = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{16\sqrt{6}}{27}$$

4.

グラフより、 $S_1(t)$ は

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_{-t}^t \{ (-x^2 + 2) - (-t^2 + 2) \} dx \\ &= - \int_{-t}^t (x-t)(x+t) dx \\ &= \frac{1}{6} \{ t - (-t) \}^3 \\ &= \frac{4}{3} t^3 \end{aligned}$$

となる。これが、 $S_2(t)$ と等しくなるとき

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_2(t) \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} t^3 &= \frac{4}{3} t (2-t^2) \\ \Leftrightarrow t(t^2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t(t-1)(t+1) &= 0 \\ \therefore t &= 0, \pm 1 \end{aligned}$$

が得られるが、 $0 < t < \sqrt{2}$ であるから

$$t = 1$$

となる。

$$(答) \ t = 1$$

〔3〕

1.

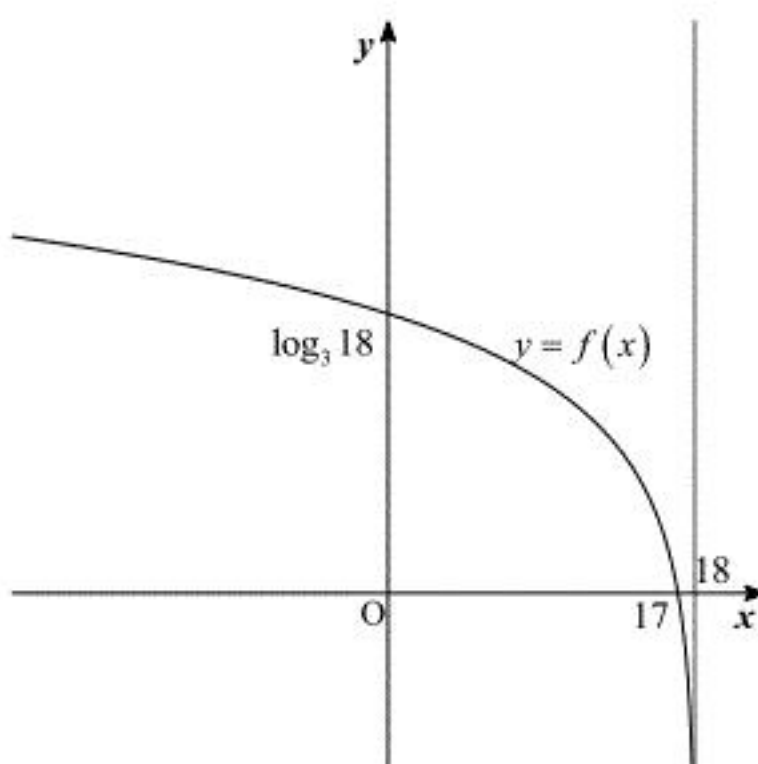
$y = f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_3(18-x) \\ &= \log_3\{-(x-18)\} \end{aligned}$$

であるから、 $y = \log_3 x$ を y 軸に関して対称移動し、 x 方向に $+18$ 平行移動させたものである。
また、

$$\begin{aligned} \log_3(18-x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 18-x &= 1 \\ \therefore x &= 17 \end{aligned}$$

より、 $x=17$ で x 軸に交わる。よって、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようなになる。



(答) 前図

2.

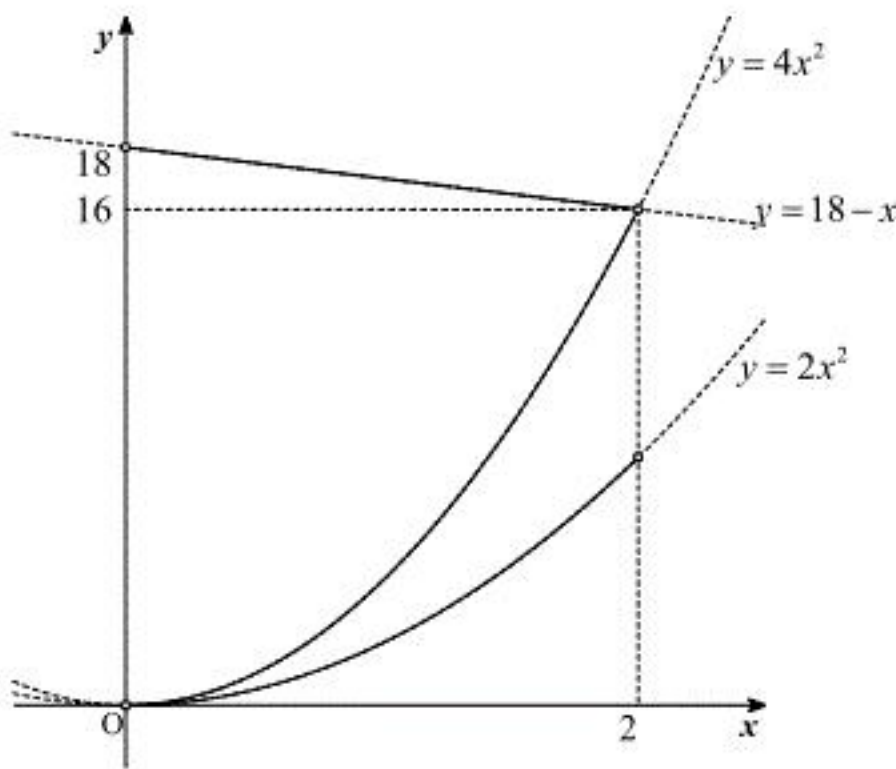
$h(x)$ は、

$$\begin{aligned} h(x) &= \log_9(4x^4) \\ &= \frac{\log_3(4x^4)}{\log_3 9} \\ &= \log_3 \sqrt{4x^4} \\ &= \log_3(2x^2) \quad (\because 2x^2 > 0) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $3 > 1$ より $y = \log_3 x$ は単調増加関数であるから、
 $f(x), g(x), h(x)$ の大小は

$$18-x, 4x^2, 2x^2$$

の大小を比べることになる。 $0 < x < 2$ の範囲で $y = 18-x, y = 4x^2, y = 2x^2$ を図示すると以下のようになる。



グラフより、 $0 < x < 2$ の範囲で

$$2x^2 < 4x^2 < 18-x$$

であるから

$$h(x) < g(x) < f(x)$$

とわかる。

(答) $h(x) < g(x) < f(x)$

3.

$$\begin{aligned} y &= f(x) - \frac{1}{2}g(x) + h(x) \\ &= \log_3(18-x) - \frac{1}{2}\log_3(4x^2) + \log_3(2x^2) \\ &= \log_3 \frac{(18-x) \cdot 2x^2}{\sqrt{4x^2}} \\ &= \log_3 \frac{(18-x) \cdot 2x^2}{2x} \quad (\because 2x > 0) \\ &= \log_3(-x^2 + 18x) \\ &= \log_3\{-(x-9)^2 + 81\} \end{aligned}$$

となる。 $y = \log_3 x$ は単調増加関数であるから、この関数が最大となるのは $-(x-9)^2 + 81$ が最大となるときである。したがって、 $x=9$ のとき最大値

$$y = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

をとる。

(答) $x=9$ のとき最大値 4

【4】

1.

$y = e^x$ の導関数は

$$y' = e^x$$

であるから、点 (t, e') における C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= e'(x-t) + e' \\ &= e'x + (1-t)e' \end{aligned}$$

である。この接線が原点を通るとき

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + (1-t)e' \\ \Leftrightarrow e'(1-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-t &= 0 \quad (\because e' > 0) \\ \Leftrightarrow t &= 1 \end{aligned}$$

となるから、求める接線の方程式は

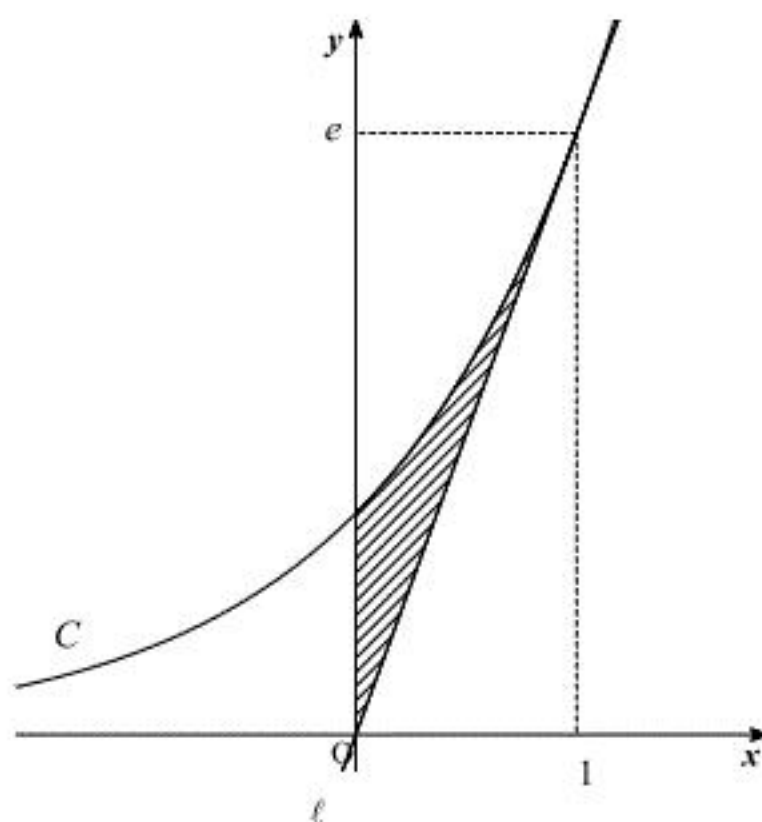
$$y = ex$$

である。

(答) $y = ex$

2.

1.より C と ℓ の交点の座標は $(1, e)$ である。よって、図形 D は下図斜線部である。



(答) 前図斜線部

3.

求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx - \frac{1}{3} \cdot e^2 \pi \cdot 1 &= \pi \int_0^1 e^{2x} dx - \frac{\pi e^2}{3} \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{\pi e^2}{3} \\ &= \frac{\pi}{6} (e^2 - 3) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{6} (e^2 - 3)$

4.

部分積分を用いると

$$\begin{aligned} I &= \int \log y dy \\ &= \int y' \log y dy \\ &= y \log y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= y \log y - y + C_1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 C_1 は積分定数である。また、 J は I を用いることで

$$\begin{aligned} J &= \int (\log y)^2 dy \\ &= \int y' (\log y)^2 dy \\ &= y (\log y)^2 - \int y \cdot 2 \log y \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= y (\log y)^2 - 2 \int \log y dy \\ &= y (\log y)^2 - 2I \\ &= y (\log y)^2 - 2(y \log y - y + C_1) \\ &= y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y + C_2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 C_2 は積分定数である。

(答) $I = y \log y - y + C_1$

$$J = y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y + C_2$$

(ただし、 C_1, C_2 は積分定数である。)

5.

C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ \Leftrightarrow x &= \log y \end{aligned}$$

であるから、4.の結果を利用すると、求める体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot e - \pi \int_1^e (\log y)^2 dy &= \frac{1}{3} \pi e - \pi \left[y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y \right]_1^e \\ &= \frac{1}{3} \pi e - \pi (e - 2) \\ &= \frac{2\pi}{3} (3 - e) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2\pi}{3} (3 - e)$