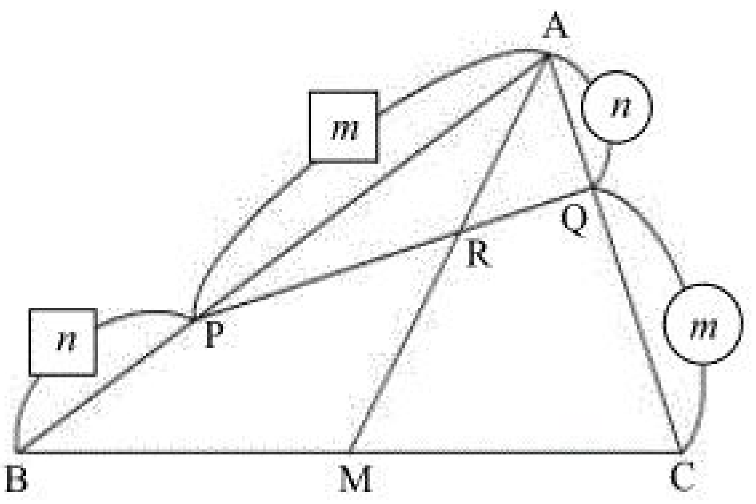
〔１〕

(1)



Mは線分BCの中点であるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)

Pは辺ABを$m:n$に内分するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{m}{m+n}\vec{a}$$

と表せる。同様に，Qは辺ACを$n:m$に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{n}{m+n}\vec{b}$$

となる。よって，RはPQ上にあるので，実数kを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{mk}{m+n}\vec{a}+\frac{n(1-k)}{m+n}\vec{b} \quad ・・・①$$

と表せる。また，RはAM上にあるので，実数ℓを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\ell}{2}\vec{a}+\frac{\ell}{2}\vec{b} \quad ・・・②$$

となる。$\vec{a},\vec{b}$は１次独立であるので，①，②を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{mk}{m+n}=\dfrac{\ell}{2}\\ \dfrac{n(1-k)}{m+n}=\dfrac{\ell}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{n}{m+n}\\ \ell=\dfrac{2mn}{(m+n)^2}\end{cases}$$

であるので，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{AM}}$より

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{a}+\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{a}+\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{b}$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{2mn}{(m+n)^2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

であるから，$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$である。

$m>0, n>0$であるから，相加平均と相乗平均の関係より，

$$m+n \geqq 2\sqrt{mn}$$

が成り立つ。ただし，等号成立条件は$m=n>0$である。これより，

$$\frac{2mn}{(m+n)^2} \leqq \frac{2mn}{(2\sqrt{mn})^2}=\frac{2mn}{4mn}=\frac{1}{2} \quad ・・・①$$

となる。ここで，三角形の重心は三角形の中線を$2:1$に内分するので，線分PQが三角形ABCの重心を通るのは

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\frac{2}{3}$$

のときであるが，①より，$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\frac{2}{3}$となることはない。ゆえに，線分PQは三角形ABCの重心を通らない。

(答) $\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$

(証明終)

〔2〕

(1)

点Pが原点に一致するのは，Pのx, y座標が共に0となるときであり，$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ より

$$\cos\theta = 0 \text{ かつ } 2\cos\theta\sin\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0$$
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

となる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

(2)

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= \cos^2\theta + (2\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= (1-\sin^2\theta) + 4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) \\ &= -4\sin^4\theta + 3\sin^2\theta + 1 \end{aligned}$$

となる。点Pが単位円上にあるとき，$\mathrm{OP}^2 = 1$ となるので，

$$-4\sin^4\theta + 3\sin^2\theta + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\theta\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin\theta = 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

となる。

(答) $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

(3)

$t = \sin^2\theta$ より(2)から

$$\mathrm{OP}^2 = -4t^2 + 3t + 1$$

となる。

(答) $\mathrm{OP}^2 = -4t^2 + 3t + 1$

(4)

tのとりうる値の範囲は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$0 \leqq \sin^2\theta \leqq 1$，すなわち$0 \leqq t \leqq 1$である。ここで，

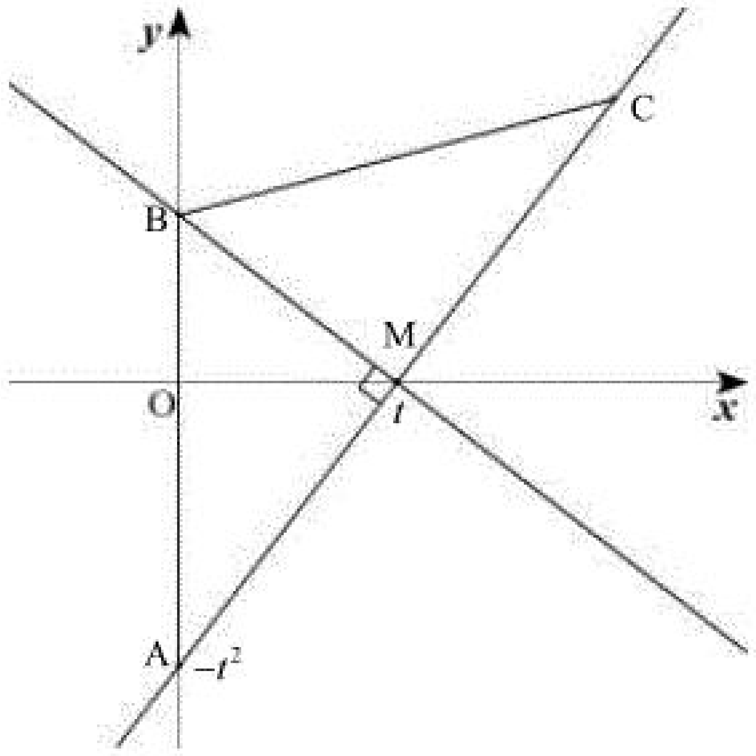
$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= -4t^2 + 3t + 1 \\ &= -4\left(t - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{16} \end{aligned}$$

であるから，$0 \leqq t \leqq 1$より，OP^2は$t = \frac{3}{8}$のとき最大値$\frac{25}{16}$をとる。このとき，OPも最大となり，その値は，$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$である。

(答) $\frac{5}{4}$

〔3〕

(1)



題意より，△ABCは$AB=AC$の二等辺三角形であり，$AM \perp BM$より，点Mは辺ACの中点となる。よって，$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2\left(t,t^2\right)=\left(2t,2t^2\right)$であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\\&=\left(0,-t^2\right)+\left(2t,2t^2\right)\\&=\left(2t,t^2\right)\end{aligned}$$

であるから，点Cの座標は$\left(2t,t^2\right)$である。

(答) $\left(2t,t^2\right)$

(2)

直線AMの傾きは$\dfrac{0-\left(-t^2\right)}{t-0}=t$であり，$AM \perp BM$であるから，$t>0$より直線BMの傾きは$-\dfrac{1}{t}$である。また，直線BMは点$\left(t,0\right)$を通るから直線BMの式は，

$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{t}\left(x-t\right)\\&=-\frac{1}{t}x+1\end{aligned}$$

と求められ，点Bはこの直線のy切片であるから，$B\left(0,1\right)$である。よって，

$BA=1-\left(-t^2\right)=1+t^2$であるから，$BA=BC$より，点Cを中心とし，点Bを通る円の方程式は

$$\left(x-2t\right)^2+\left(y-t^2\right)^2=\left(1+t^2\right)^2$$
$$\therefore \left(x-2t\right)^2+\left(y-t^2\right)^2=t^4+2t^2+1$$

と求まる。

(答) $\left(x-2t\right)^2+\left(y-t^2\right)^2=t^4+2t^2+1$

(3)

y座標が最小となるのは，中心とx座標が等しく，y座標が小さい方の点であるから，

$$x=2t$$
$$y=t^2-\left(t^2+1\right)=-1$$

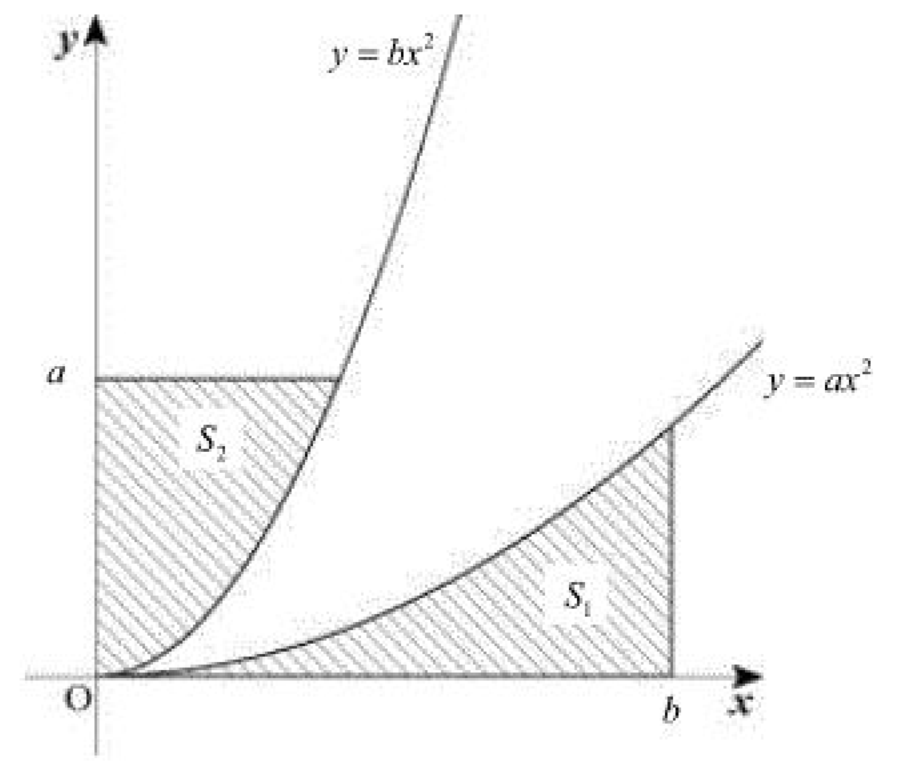
より，求める座標は$\left(2t,-1\right)$となる。

(答) $\left(2t,-1\right)$

〔4〕

(1)

曲線C_1, C_2およびS_1, S_2は下図の実線部および斜線部となる。



よって，面積S_1は図より，

$$S_1=\int_0^b ax^2\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^b=\frac{ab^3}{3}$$

となる。(*)

また，

$$C_2: y=bx^2\,(x\geqq 0)\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{y}{b}}\ (\because b>0)$$

より，面積S_2は，

$$S_2=\int_0^a\sqrt{\frac{y}{b}}\,dy=\left[\frac{2y\sqrt{y}}{3\sqrt{b}}\right]_0^a=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

と求まる。

(答) $S_1=\frac{ab^3}{3},\ S_2=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$

(2)

(1)の答えより，

$$S_1=S_2$$
$$\Leftrightarrow \frac{ab^3}{3}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$\Leftrightarrow b^3=2\sqrt{\frac{a}{b}}\ (\because a>0)$$

であり，両辺を2乗して，

$$b^6=\frac{4a}{b}$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{b^7}{4}$$

となる。

(答) $a=\frac{b^7}{4}$

(3)

(2)より，

$$S_1=S_2=\frac{b^7}{4}\cdot\frac{b^3}{3}=\frac{b^{10}}{12}$$

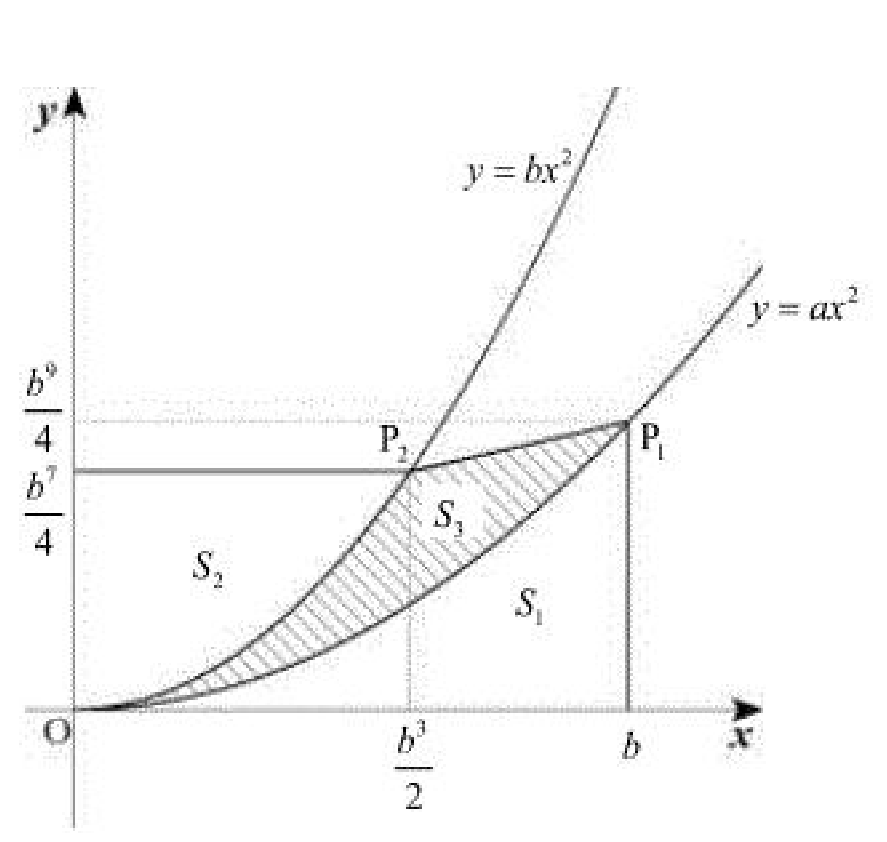
であり，$P_1\left(b, \frac{b^9}{4}\right)$となる。また，$P_2$については

$$bx^2=\frac{b^7}{4}\Leftrightarrow x=\frac{b^3}{2}\ (\because x>0, b>0)$$

より，$P_2\left(\frac{b^3}{2}, \frac{b^7}{4}\right)$となる。このとき，$a<b^3$より

$$\frac{b^7}{4}<b^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^6}{4}<b^2\ (\because b>0)$$
$$\therefore \frac{b^3}{2}<b\ (\because b>0)$$

である。下図より，面積S_3は，縦の長さ$\frac{b^7}{4}$，横の長さ$\frac{b^3}{2}$の長方形と上辺$\frac{b^7}{4}$，下辺$\frac{b^9}{4}$，高さ$b-\frac{b^3}{2}$の台形を合わせたものの面積から，S_1, S_2を除いた面積であるので，



$$S_3=\frac{b^3}{2}\cdot\frac{b^7}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{b^7}{4}+\frac{b^9}{4}\right)\left(b-\frac{b^3}{2}\right)-S_1-S_2$$
$$=\frac{b^{10}}{8}-\frac{b^8}{16}\left(b^2+1\right)\left(b^2-2\right)-2\cdot\frac{b^{10}}{12}$$
$$=-\frac{b^{12}}{16}+\frac{b^{10}}{48}+\frac{b^8}{8}$$

となる。

(答) $S_3=-\frac{b^{12}}{16}+\frac{b^{10}}{48}+\frac{b^8}{8}$

(4)

$$S_1=S_3$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^{10}}{12}=-\frac{b^{12}}{16}+\frac{b^{10}}{48}+\frac{b^8}{8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^{12}}{16}+\frac{b^{10}}{16}-\frac{b^8}{8}=0$$

である。両辺を$\frac{b^8}{16}(\neq 0)$で割って，

$$b^4+b^2-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(b^2-1\right)\left(b^2+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow b^2=1\ (\because b^2>0)$$
$$\Leftrightarrow b=1\ (\because b>0)$$

となる。これと$a=\frac{b^7}{4}$より，

$$a=\frac{1}{4}$$

である。

(答) $a=\frac{1}{4}, b=1$

〔５〕

(1)

$f(x)=e^{-ax}$とおく。$f(0)=1$より，$\mathrm{P}(0,1)$である。また，$f'(x)=-ae^{-ax}$より接線ℓの方程式は

$$\begin{aligned} y &= -a(x-0)+1 \\ &= -ax+1 \end{aligned}$$

となる。

(答)　$y=-ax+1$

(2)

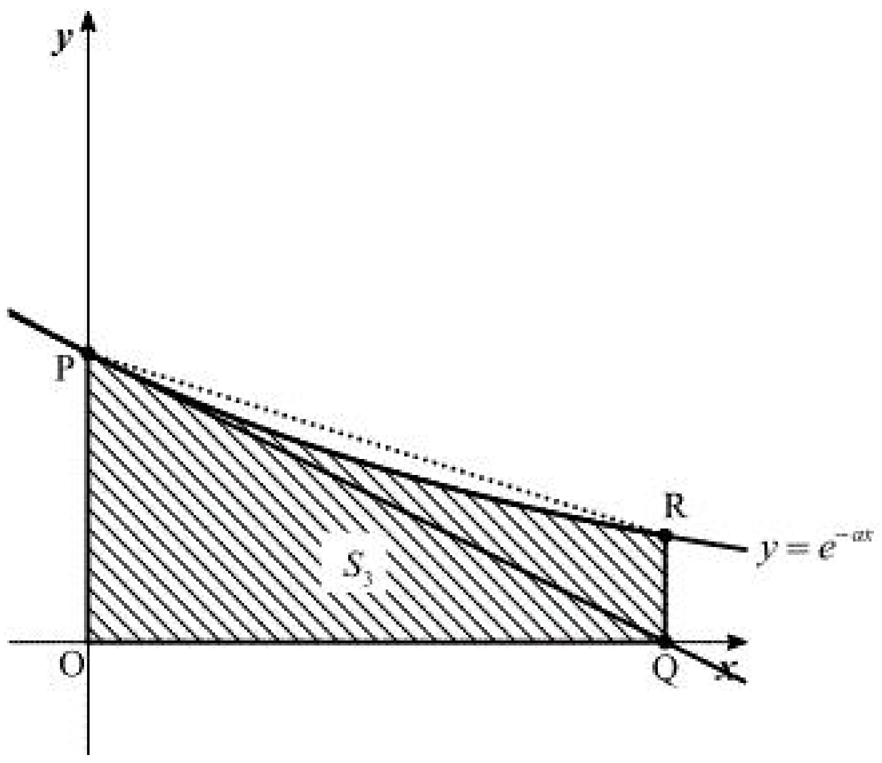
$y=0$と$y=-ax+1$から，yを消去して

$$0=-ax+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{a}\left(\quad a\neq 0\right)$$

となるから，直線ℓとx軸の交点Qの座標は$\left(\frac{1}{a},0\right)$となる。

(答)　$\left(\frac{1}{a},0\right)$

(3)



曲線Cとx軸，y軸，直線$y=\frac{1}{a}$で囲まれる領域の面積をS_3とする。面積S_3は

$$S_3=\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)\,dx=\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}\left(1-e^{-1}\right)$$

である。接線ℓの方程式を$y=g(x)=-ax+1$とすると

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{a}} g(x)\,dx$$

となる。直線PRの方程式を$y=h(x)$とすると

$$S_3=\int_0^{\frac{1}{a}} h(x)\,dx$$

となる。ここで，$a>0$より$f''(x)=a^2e^{-ax}>0$となるので，$y=f(x)$は下に凸である。これによって，$0<x<\frac{1}{a}$のとき$g(x)<f(x)<h(x)$が成立するので，

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{a}} g(x)\,dx<\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)\,dx<\int_0^{\frac{1}{a}} h(x)\,dx \\ &\therefore S_1<\frac{1}{a}\left(1-e^{-1}\right)<S_2 \end{aligned}$$

が成立する。

(証明終)