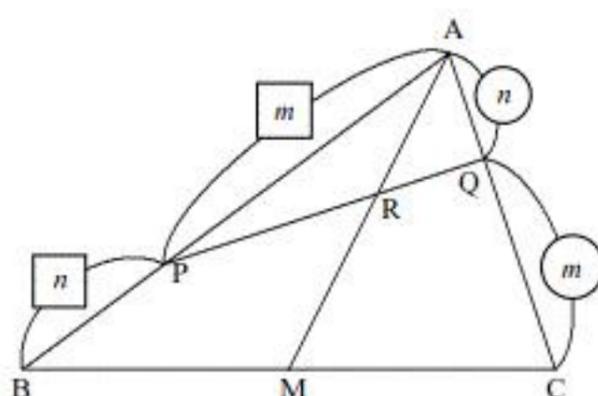


[1]

(1)



MはA, Bの中点であるので,

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

(2)

Pは辺ABを $m:n$ に内分するので,

$$\overline{AP} = \frac{m}{m+n}\vec{a}$$

と表せる。同様に、Qは辺ACを $n:m$ に内分するので

$$\overline{AQ} = \frac{n}{m+n}\vec{b}$$

となる。よって、RはPQ上にあるので、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= k\overline{AP} + (1-k)\overline{AQ} \\ \therefore \overline{AR} &= \frac{mk}{m+n}\vec{a} + \frac{n(1-k)}{m+n}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、RはAM上にあるので、実数 ℓ を用いて

$$\overline{AR} = \ell\overline{AM} = \frac{\ell}{2}\vec{a} + \frac{\ell}{2}\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 \vec{a}, \vec{b} は1次独立であるので、①、②を比較して

$$\begin{cases} \frac{mk}{m+n} = \frac{\ell}{2} \\ \frac{n(1-k)}{m+n} = \frac{\ell}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{n}{m+n} \\ \ell = \frac{2mn}{(m+n)^2} \end{cases}$$

であるので、 $\overline{AR} = \ell\overline{AM}$ より

$$\overline{AR} = \frac{mn}{(m+n)^2}\vec{a} + \frac{mn}{(m+n)^2}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overline{AR} = \frac{mn}{(m+n)^2}\vec{a} + \frac{mn}{(m+n)^2}\vec{b}$

(3)

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= \ell\overline{AM} \\ &= \frac{2mn}{(m+n)^2}\overline{AM}\end{aligned}$$

であるから、 $\frac{AR}{AM} = \frac{2mn}{(m+n)^2}$ である。

(答) $\frac{AR}{AM} = \frac{2mn}{(m+n)^2}$

$m > 0, n > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より、

$$m+n \geq 2\sqrt{mn}$$

が成り立つ。ただし、等号成立条件は $m=n > 0$ である。これより、

$$\frac{2mn}{(m+n)^2} \leq \frac{2mn}{(2\sqrt{mn})^2} = \frac{2mn}{4mn} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、三角形の重心は三角形の中線を2:1に内分するので、線分PQが三角形ABCの重心を通るのは

$$\frac{AR}{AM} = \frac{2}{3}$$

のときであるが、①より、 $\frac{AR}{AM} = \frac{2}{3}$ となることはない。ゆえに、線分PQは三角形ABCの重心を通らない。

(証明終)

[2]

(1)

点Pが原点に一致するのは、Pのx, y座標が共に0となるときなので、

$$\cos\theta = 0 \text{ かつ } \sin 2\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ かつ } \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

(2)

点Pが単位円上にあるとき、

$$\cos^2\theta + \sin^2 2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 \quad (\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^2\theta) + 4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\theta(3 - 4\sin^2\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\theta(\sqrt{3} - 2\sin\theta)(\sqrt{3} + 2\sin\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = 0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

(3)

$$OP^2 = \cos^2\theta + \sin^2 2\theta$$

$$= \cos^2\theta + (2\sin\theta\cos\theta)^2 \quad (\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= \cos^2\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (1 - \sin^2\theta) + 4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta)$$

$$= (1 - t) + 4t(1 - t)$$

$$= -4t^2 + 3t + 1$$

となる。

$$\text{(答)} \quad OP^2 = -4t^2 + 3t + 1$$

(4)

tのとりうる値の範囲は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ 、すなわち $0 \leq t \leq 1$ である。ここで、

$$OP^2 = -4t^2 + 3t + 1$$

$$= -4\left(t - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{16}$$

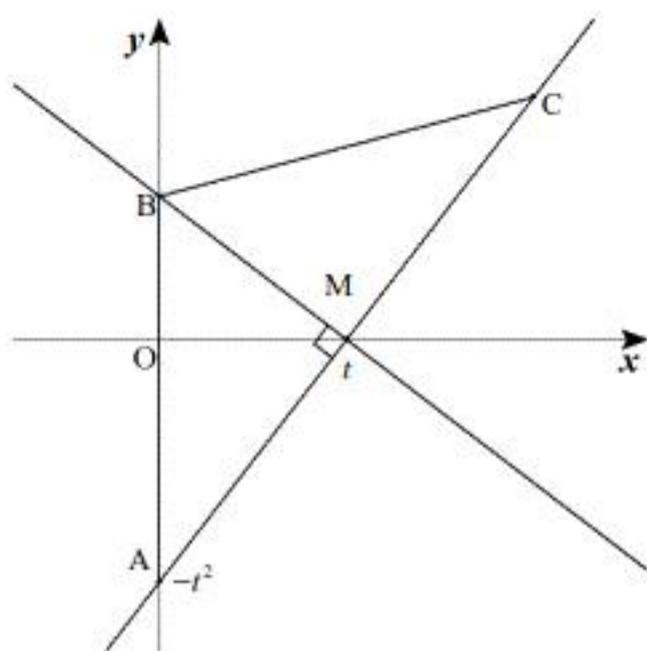
であるから、 $0 \leq t \leq 1$ より、 OP^2 は $t = \frac{3}{8}$ のとき最大値 $\frac{25}{16}$ をとる。このとき、OPも最大とな

り、その値は、 $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ である。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{4}$$

[3]

(1)



(1)

題意より、 $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形であり、 $AM \perp BM$ より、点 M は辺 AC の中点となる。よって、 $\overline{AC} = 2\overline{AM} = 2(t, t^2) = (2t, 2t^2)$ であり、

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AC} \\ &= (0, -t^2) + (2t, 2t^2) \\ &= (2t, t^2)\end{aligned}$$

であるから、点 C の座標は $(2t, t^2)$ である。

(答) $(2t, t^2)$

(2)

直線 AM の傾きは $\frac{0 - (-t^2)}{t - 0} = t$ であり、 $AM \perp BM$ であるから、直線 BM の傾きは $-\frac{1}{t}$ である。

また、直線 BM は点 $(t, 0)$ を通るから直線 BM の式は、

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{t}(x - t) \\ &= -\frac{1}{t}x + 1\end{aligned}$$

と求められ、点 B はこの直線の y 切片であるから、 $B(0, 1)$ である。よって、

$BA = 1 - (-t^2) = 1 + t^2$ であるから、 $BA = BC$ より、点 C を中心とし、点 B を通る円の方程式は

$$\begin{aligned}(x - 2t)^2 + (y - t^2)^2 &= (1 + t^2)^2 \\ \therefore (x - 2t)^2 + (y - t^2)^2 &= t^4 + 2t^2 + 1\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $(x - 2t)^2 + (y - t^2)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$

(3)

y 座標が最小となるのは、中心と x 座標が等しく、 y 座標が小さい方の点であるから、

$$\begin{aligned}x &= 2t \\ y &= t^2 - (t^2 + 1) = -1\end{aligned}$$

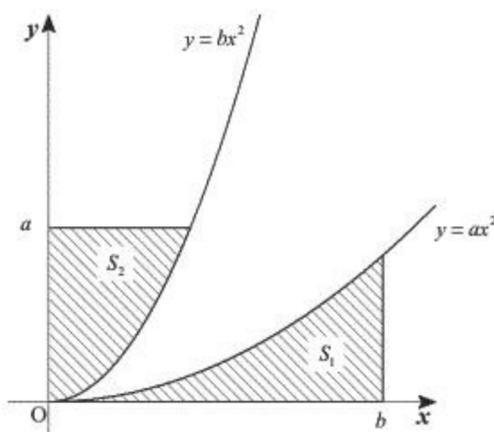
より、求める座標は $(2t, -1)$ となる。

(答) $(2t, -1)$

[4]

(1)

曲線 C_1, C_2 および S_1, S_2 は下図の実線部および斜線部となる。



よって、面積 S_1 は図より、

$$S_1 = \int_0^b ax^2 dx = \left[\frac{a}{3}x^3 \right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

となる。また、

$$C_2: y = bx^2 (x \geq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{b}}$$

より、面積 S_2 は、

$$S_2 = \int_0^a \sqrt{\frac{y}{b}} dy = \left[\frac{2y\sqrt{y}}{3\sqrt{b}} \right]_0^a = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

と求まる。

(答) $S_1 = \frac{ab^3}{3}, S_2 = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{b}}$

(2)

(1)の答えより、

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{ab^3}{3} &= \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ \Leftrightarrow b^3 &= 2\sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

であり、両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} b^6 &= \frac{4a}{b} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{b^7}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{b^7}{4}$

(3)

(2)より、

$$S_1 = S_2 = \frac{b^7}{4} \cdot \frac{b^2}{3} = \frac{b^9}{12}$$

となる。また、 $y = bx^2$ と $y = a$ の交点は、 y を消去して

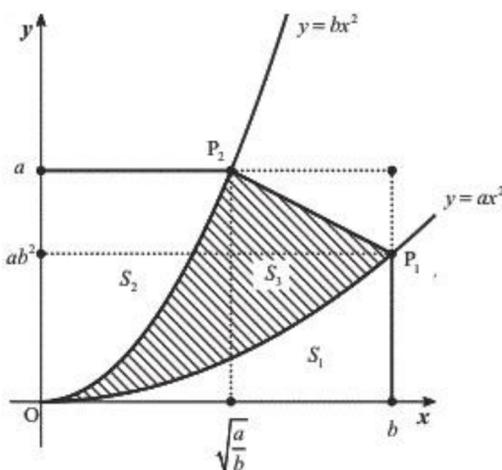
$$bx^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\because x \geq 0)$$

より、 $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}, a\right)$ となる。このとき、題意より、

$$\begin{aligned} a &< b^3 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} &< b^2 \quad (\because b > 0) \\ \therefore \sqrt{\frac{a}{b}} &< b \quad (\because 0 < a < b) \end{aligned}$$

である。以下、 a と ab^2 の大小関係で場合分けする。

[1] $a \geq ab^2$ のとき

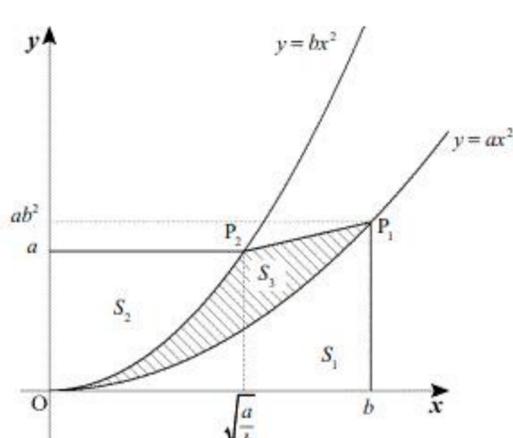


上図より、面積 S_3 は、縦の長さ a 、横の長さ b の長方形から、余分な三か所の面積を除いて、

$$\begin{aligned} S_3 &= ab - \frac{1}{2} \cdot (a - ab^2) \left(b - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) - S_1 - S_2 \\ &= \frac{b^8}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b^7}{4} - \frac{b^9}{4} \right) \left(b - \frac{b^3}{2} \right) - \frac{b^{10}}{12} \cdot 2 \\ &= \frac{b^8}{4} - \frac{b^8}{8} + \frac{b^{10}}{16} + \frac{b^{10}}{8} - \frac{b^{12}}{16} - \frac{b^{10}}{6} \\ &= -\frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{48} + \frac{b^8}{8} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a \leq ab^2$ のとき



上図より、面積 S_3 は、縦の長さ ab^2 、横の長さ b の長方形から、余分な三か所の面積を除いて、

$$\begin{aligned} S_3 &= ab^2 \cdot b - \frac{1}{2} \cdot (ab^2 - a) \left(b + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) - S_1 - S_2 \\ &= \frac{b^{10}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b^9}{4} - \frac{b^7}{4} \right) \left(b + \frac{b^3}{2} \right) - \frac{b^{10}}{12} \cdot 2 \\ &= \frac{b^{10}}{4} + \frac{b^8}{8} - \frac{b^{10}}{16} - \frac{b^{12}}{16} - \frac{b^{10}}{6} \\ &= -\frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{48} + \frac{b^8}{8} \end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より、 $S_3 = -\frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{48} + \frac{b^8}{8}$ となる。

(答) $S_3 = -\frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{48} + \frac{b^8}{8}$

(4)

$$\begin{aligned} S_1 &= S_3 \\ \Leftrightarrow \frac{b^9}{12} &= -\frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{48} + \frac{b^8}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{16} - \frac{b^8}{8} &= 0 \end{aligned}$$

である。両辺を $\frac{b^8}{16} (\neq 0)$ で割って、

$$\begin{aligned} b^4 + b^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - 1)(b^2 + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= 1 \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。これと $a = \frac{b^7}{4}$ より、

$$a = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $a = \frac{1}{4}, b = 1$