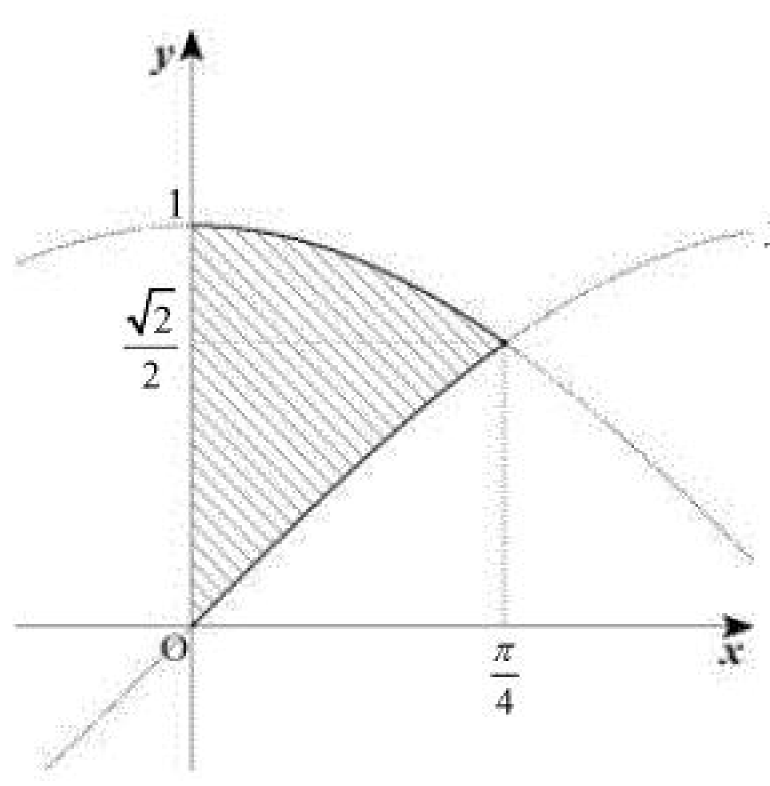
〔1〕

(1)



図形Dは上図の斜線部分であり，その面積は，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)$$
$$=\sqrt{2}-1$$

となる。

(答) $\sqrt{2}-1$

(2)

それぞれ部分積分を用いて，

$$\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'\,dx$$
$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C_1$$
$$\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'\,dx$$
$$=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C_2$$

となる。ただしC_1, C_2は積分定数とする。

(答) $\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\sin x+C_1$

$\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+C_2$

(3)

部分積分法と(2)の結果を用いて，

$$\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'\,dx$$
$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_3$$
$$\int x^2\cos x\,dx=\int x^2(\sin x)'\,dx$$
$$=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx$$
$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C_4$$

となる。ただしC_3, C_4は積分定数とする。

(答) $\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_3$

$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C_4$

(4)

曲線C_1, C_2の方程式をそれぞれ，

$$y_1=\sin x_1\quad\left(0\leqq x_1\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$
$$y_2=\cos x_2\quad\left(0\leqq x_2\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

とすると，求める立体の体積Vは，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x_1^2\,dy_1+\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x_2^2\,dy_2$$

となる。$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x_1^2\,dy_1$について，$y_1=\sin x_1$であるから，

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\cos x_1$$

であり，y_1とx_1は次のように対応する。

y_1	0	$\to$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
x_1	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

以上より，

$$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x_1^2\,dy_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x_1^2\frac{dy_1}{dx_1}\,dx_1$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos x\,dx$$
$$=\pi\left[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2-\sqrt{2}\pi$$

となる。同様に，$\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x_2^2\,dy_2$について，$y_2=\cos x_2$であるから，

$$\frac{dy_2}{dx_2}=-\sin x_2$$

であり，y_2とx_2は次のように対応する。

y_2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\to$	1
x_2	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	0

以上より，

$$\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x_2^2\,dy_2=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^0 x_2^2\frac{dy_2}{dx_2}\,dx_2$$
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^0(-x^2\sin x)\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx$$
$$=\pi\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2+\sqrt{2}\pi-2\pi$$

となる。よって，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\,dy+\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x^2\,dy$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2-\sqrt{2}\pi\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2+\sqrt{2}\pi-2\pi\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2-2\pi$$

と求められる。

(答) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2-2\pi$

〔2〕

(1)

$y=f(x)$ のグラフ上に格子点が存在することは，$y=f(x)$ を満たすような整数の組 (x, y) が存在することと同値である。$f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\left(x^3+3x^2-x-2\right) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)x(x+1)+x^2-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

と変形でき，x が整数であるとき，$(x-1)x(x+1)$ は連続する3つの整数の積であるから3の倍数である。よって，$\frac{1}{3}(x-1)x(x+1)$ は整数であり，$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)x(x+1)+x^2-\frac{2}{3}$ は2つの整数と整数でない数の和となるから $f(x)$ は整数ではない。以上より，$y=f(x)$ を満たすような整数の組 (x, y) は存在せず，$y=f(x)$ のグラフ上に格子点は存在しない。

(証明終了)

(2)

$f(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(3x^2+6x-1\right) \\ &= x^2+2x-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となるから，$(n, f(n))$ における接線 ℓ は

$$\begin{aligned} y &= \left(n^2+2n-\frac{1}{3}\right)(x-n)+\frac{1}{3}\left(n^3+3n^2-n-2\right) \\ &= \left(n^2+2n\right)(x-n)+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+n^2-\frac{1}{3}(x-n+2) \end{aligned}$$

と表せる。ここで，整数 m を用いて $x=3m+n-2$ と表したとき，x は整数であり，

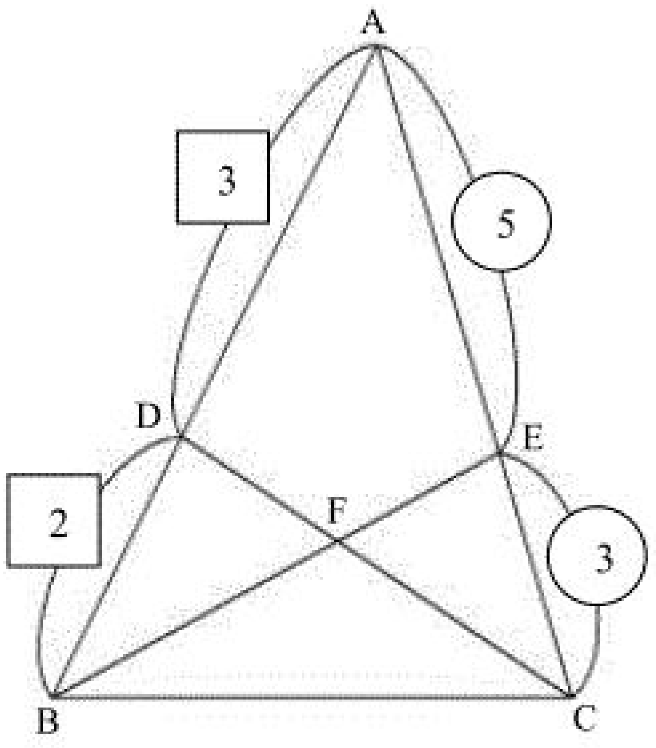
$$-\frac{1}{3}(x-n+2)=-m$$

より，$-\frac{1}{3}(x-n+2)$ は整数となる。また，$\left(n^2+2n\right)(x-n)$, $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$, n^2 のいずれも整数であることから，y は整数の和で表せるから整数となる。よって，整数の組 (x, y) は無数に存在し，直線 ℓ 上には無限に多くの格子点が存在する。

(証明終了)

〔３〕

(1)



三角形ACDと直線BEにおいて，メネラウスの定理より

$$\frac{EC}{AE}\cdot\frac{FD}{CF}\cdot\frac{AB}{DB}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{3}{5}\cdot\frac{FD}{CF}\cdot\frac{5}{2}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{FD}{CF}=\frac{2}{3}$$
$$\therefore CF:FD=3:2$$

となる。

(答) $CF:FD=3:2$

(2)

4点D, B, C, Eが同一円周上にある時，方べきの定理から

$$AD\cdot AB=AE\cdot AC$$
$$\Leftrightarrow\frac{3}{5}AB\cdot AB=\frac{5}{8}AC\cdot AC$$
$$\Leftrightarrow AC^2=\frac{24}{25}AB^2$$
$$\therefore AC=\frac{2\sqrt{6}}{5}AB$$

となる。よって，

$$AB:AC=AB:\frac{2\sqrt{6}}{5}AB=5:2\sqrt{6}$$

となる。また，円の中心が辺BC上にあるとき，BCは円の直径となり，$\angle CDB$は直径に対する円周角であるので

$$\angle CDB=90°$$

となる。このとき，三角形ADCと三角形BDCにおいて，三平方の定理から

$$AC^2-AD^2=BC^2-DB^2$$
$$\Leftrightarrow AC^2-\left(\frac{3}{5}AB\right)^2=BC^2-\left(\frac{2}{5}AB\right)^2$$

となる。ここで，$AC^2=\frac{24}{25}AB^2$より

$$\frac{24}{25}AB^2-\left(\frac{3}{5}AB\right)^2=BC^2-\left(\frac{2}{5}AB\right)^2$$
$$\Leftrightarrow BC^2=\frac{19}{25}AB^2$$
$$\therefore BC=\frac{\sqrt{19}}{5}AB$$

となる。以上より，

$$AB:AC:BC=AB:\frac{2\sqrt{6}}{5}AB:\frac{\sqrt{19}}{5}AB=5:2\sqrt{6}:\sqrt{19}$$

となる。

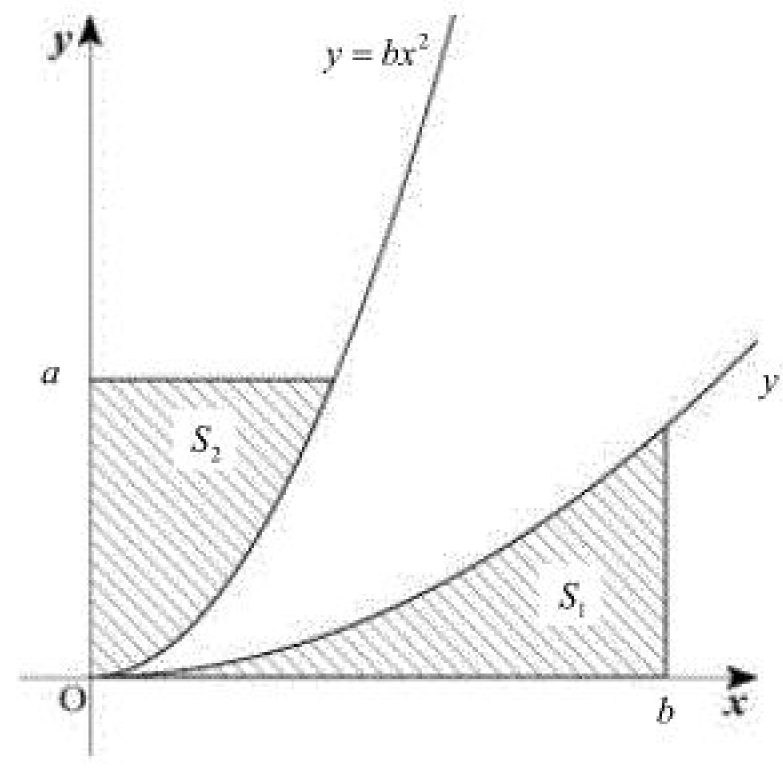
(答) $AB:AC=5:2\sqrt{6}$

$AB:AC:BC=5:2\sqrt{6}:\sqrt{19}$

〔4〕

(1)

曲線C_1, C_2およびS_1, S_2は下図の実線部および斜線部となる。



よって，面積S_1は図より，

$$S_1 = \int_0^b ax^2\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

となる。(*)

また，

$$C_2 : y = bx^2\,(x \geqq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{b}}\ (\because b > 0)$$

より，面積S_2は，

$$S_2 = \int_0^a \sqrt{\frac{y}{b}}\,dy = \left[\frac{2y\sqrt{y}}{3\sqrt{b}}\right]_0^a = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

と求まる。

(答) $S_1 = \dfrac{ab^3}{3},\ S_2 = \dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(2)

(1)の答えより，

$$S_1 = S_2$$
$$\Leftrightarrow \frac{ab^3}{3} = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$\Leftrightarrow b^3 = 2\sqrt{\frac{a}{b}}\ (\because a > 0)$$

であり，両辺を2乗して，

$$b^6 = \frac{4a}{b}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{b^7}{4}$$

となる。

(答) $a = \dfrac{b^7}{4}$

(3)

(2)より，

$$S_1 = S_2 = \frac{b^7}{4}\cdot\frac{b^3}{3} = \frac{b^{10}}{12}$$

であり，$P_1\left(b, \dfrac{b^9}{4}\right)$となる。また，$P_2$については

$$bx^2 = \frac{b^7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{b^3}{2}\ (\because x > 0, b > 0)$$

より，$P_2\left(\dfrac{b^3}{2}, \dfrac{b^7}{4}\right)$となる。このとき，$a < b^3$より

$$\frac{b^7}{4} < b^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^6}{4} < b^2\ (\because b > 0)$$
$$\therefore \frac{b^3}{2} < b\ (\because b > 0)$$

である。下図より，面積S_3は，縦の長さ$\dfrac{b^7}{4}$，横の長さ$\dfrac{b^3}{2}$の長方形と上辺$\dfrac{b^7}{4}$，下辺$\dfrac{b^9}{4}$，高さ$b - \dfrac{b^3}{2}$の台形を合わせたものの面積から，S_1, S_2を除いた面積であるので，

$$S_3 = \frac{b^3}{2}\cdot\frac{b^7}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{b^7}{4} + \frac{b^9}{4}\right)\left(b - \frac{b^3}{2}\right) - S_1 - S_2$$
$$= \frac{b^{10}}{8} - \frac{b^8}{16}\left(b^2 + 1\right)\left(b^2 - 2\right) - 2\cdot\frac{b^{10}}{12}$$
$$= -\frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{48} + \frac{b^8}{8}$$

となる。

(答) $S_3 = -\dfrac{b^{12}}{16} + \dfrac{b^{10}}{48} + \dfrac{b^8}{8}$

(4)

$$S_1 = S_3$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^{10}}{12} = -\frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{48} + \frac{b^8}{8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^{12}}{16} + \frac{b^{10}}{16} - \frac{b^8}{8} = 0$$

である。両辺を$\dfrac{b^8}{16}(\neq 0)$で割って，

$$b^4 + b^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(b^2 - 1\right)\left(b^2 + 2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow b^2 = 1\ (\because b^2 > 0)$$
$$\Leftrightarrow b = 1\ (\because b > 0)$$

となる。これと$a = \dfrac{b^7}{4}$より，

$$a = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $a = \dfrac{1}{4}, b = 1$