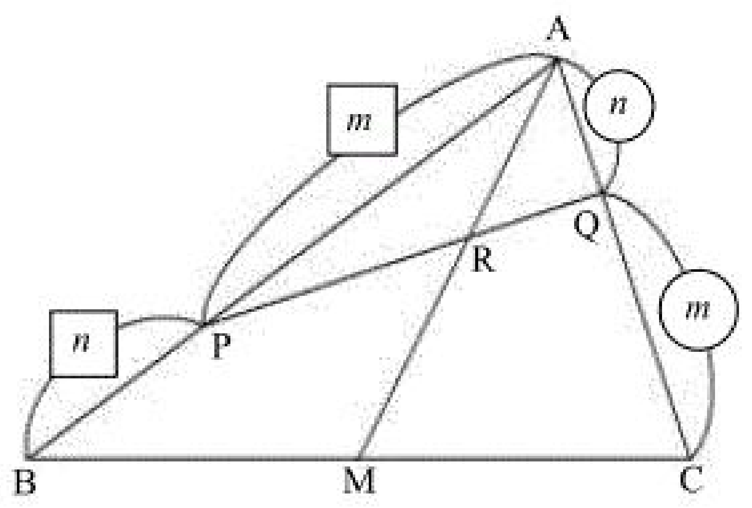
〔１〕

(1)



Mは線分BCの中点であるので,

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)

Pは辺ABを$m:n$に内分するので,

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\vec{a}$$

と表せる。同様に，Qは辺ACを$n:m$に内分するので

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{n}{m+n}\vec{b}$$

となる。よって，RはPQ上にあるので，実数kを用いて

$$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AP}+(1-k)\overrightarrow{AQ}$$
$$\therefore \overrightarrow{AR}=\frac{mk}{m+n}\vec{a}+\frac{n(1-k)}{m+n}\vec{b} \quad \cdots ①$$

と表せる。また，RはAM上にあるので，実数ℓを用いて

$$\overrightarrow{AR}=\ell\overrightarrow{AM}=\frac{\ell}{2}\vec{a}+\frac{\ell}{2}\vec{b} \quad \cdots ②$$

となる。$\vec{a},\vec{b}$は1次独立であるので，①，②を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{mk}{m+n}=\dfrac{\ell}{2}\\[2mm] \dfrac{n(1-k)}{m+n}=\dfrac{\ell}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{n}{m+n}\\[2mm] \ell=\dfrac{2mn}{(m+n)^2}\end{cases}$$

であるので，$\overrightarrow{AR}=\ell\overrightarrow{AM}$より

$$\overrightarrow{AR}=\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{a}+\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AR}=\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{a}+\frac{mn}{(m+n)^2}\vec{b}$

(3)

$$\overrightarrow{AR}=\ell\overrightarrow{AM}$$
$$=\frac{2mn}{(m+n)^2}\overrightarrow{AM}$$

であるから，$\frac{AR}{AM}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$である。

$m>0, n>0$であるから，相加平均と相乗平均の関係より,

$$m+n \geqq 2\sqrt{mn}$$

が成り立つ。ただし，等号成立条件は$m=n>0$である。これより,

$$\frac{2mn}{(m+n)^2} \leqq \frac{2mn}{(2\sqrt{mn})^2}=\frac{2mn}{4mn}=\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

となる。ここで，三角形の重心は三角形の中線を$2:1$に内分するので，線分PQが三角形ABCの重心を通るのは

$$\frac{AR}{AM}=\frac{2}{3}$$

のときであるが，①より，$\frac{AR}{AM}=\frac{2}{3}$となることはない。ゆえに，線分PQは三角形ABCの重心を通らない。

(答) $\frac{AR}{AM}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$

(証明終)

〔2〕

(1)

第1群より順番に書き出すと

$$1 \mid 2, 3 \mid 4, 5, 6 \mid 7, 8, 9, 10 \mid 11, 12, 13, 14, 15 \mid 16, 17, 18, 19, 20, 21 \mid$$
$$22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 \mid 29, \cdots$$

となるので，自然数29は第8群である。

(答) 第8群

(2)

第n群に入る最大の自然数は，第n群までに含まれる自然数の個数に等しいので

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

である。$n \geqq 2$のとき，第n群の最小の自然数は第$n-1$群に入る最大の自然数より1大きいので

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$$

となる。$n=1$のとき，$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1=1$となるので，これは$n \geqq$で成り立つ。

(答) 最小：$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

最大：$\frac{1}{2}n(n+1)$

(3)

2017が第k群に存在するとする。このとき，2017は第$k-1$群の最大値よりは大きく，第k群の最大値以下であるから，

$$\frac{1}{2}(k-1)k<2017 \leqq \frac{1}{2}k(k+1)$$
$$\Leftrightarrow (k-1)k<4034 \leqq k(k+1)$$

が成立する。ここで，

$$63 \cdot 64=4032$$
$$64 \cdot 65=4160$$

であるから

$$(64-1) \cdot 64<4034 \leqq 64 \cdot (64+1)$$

が成立する。よって，$k=64$であるので，2017は第64群に入る。

(答) 第64群

〔3〕

a)

真数条件より，$y>0$ である。与式を変形すると

$$\log_2 y-2x+3=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2 y=2x-3$$
$$\therefore y=2^{2x-3}$$

となる。これは連続関数である。$2x-3$は全ての実数値をとり，$y=2^{2x-3}$は単調増加で

$\lim_{X\to-\infty}2^X=0,\ \lim_{X\to\infty}2^X=\infty$であるから，真数条件と合わせて，$y$のとりうる値の範囲は$0<y$と

なる。

(答)　$y=2^{2x-3},\ y>0$

b)

真数条件より，$y>0,\ x^2+1>0$である。与式を変形すると

$$\log_2 y+\log_2\left(x^2+1\right)-3=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2 y=3-\log_2\left(x^2+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 y=\log_2\frac{8}{x^2+1}$$
$$\therefore y=\frac{8}{x^2+1}$$

となる。これは連続関数である。$1\leqq x^2+1$より$0<\dfrac{1}{x^2+1}\leqq 1\Leftrightarrow 0<\dfrac{8}{x^2+1}\leqq 8$となるから，真数条件と合わせて，$y$のとりうる値の範囲は$0<y\leqq 8$となる。

(答)　$y=\dfrac{8}{x^2+1},\ 0<y\leqq 8$

c)

真数条件より，$y>0,\ x^2+1>0$である。与式を変形すると

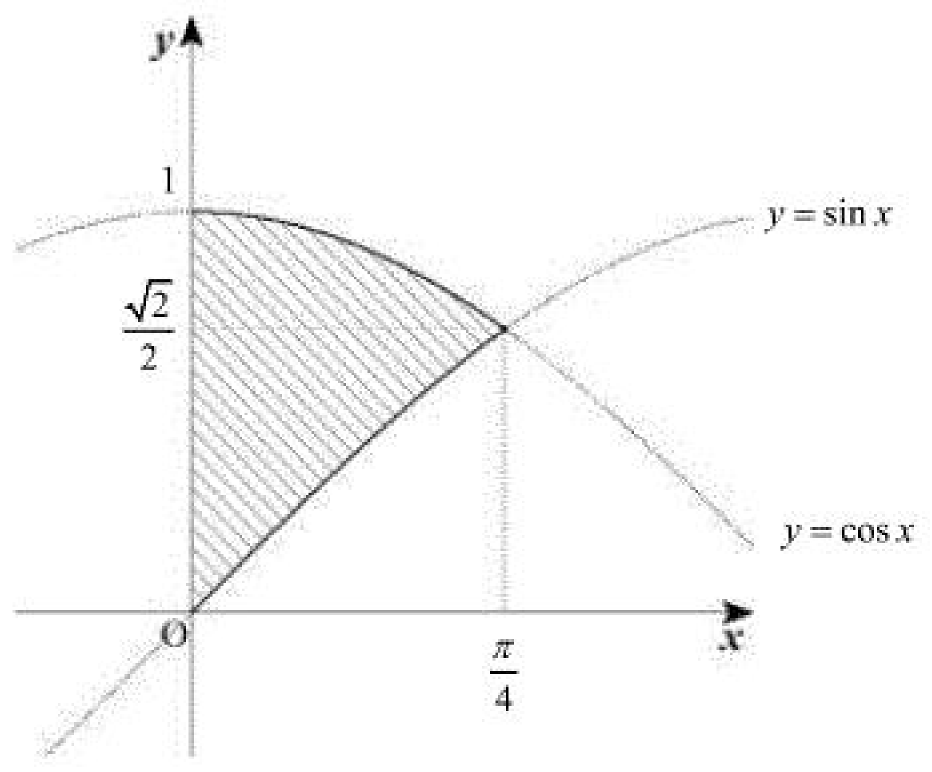
$$\log_2 y-\log_4\left(x^2+1\right)-1=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2 y=1+\log_4\left(x^2+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 y=1+\frac{\log_2\left(x^2+1\right)}{\log_2 4}$$
$$\Leftrightarrow \log_2 y=1+\frac{1}{2}\log_2\left(x^2+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 y=\log_2 2\sqrt{x^2+1}$$
$$\therefore y=2\sqrt{x^2+1}$$

となる。これは連続関数である。$1\leqq x^2+1$より$1\leqq\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow 2\leqq 2\sqrt{x^2+1}$であるから，真数条件と合わせて，$y$のとりうる値の範囲は$2\leqq y$となる。

(答)　$y=2\sqrt{x^2+1},\ y\geqq 2$

〔4〕

(1)



図形Dは上図の斜線部分であり，その面積は，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)$$
$$=\sqrt{2}-1$$

となる。

(答) $\sqrt{2}-1$

(2)

それぞれ部分積分を用いて，

$$\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'\,dx$$
$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C_1$$
$$\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'\,dx$$
$$=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C_2$$

となる。ただしC_1, C_2は積分定数とする。

(答) $\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\sin x+C_1$

$\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+C_2$

(3)

部分積分法と(2)の結果を用いて，

$$\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'\,dx$$
$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_3$$
$$\int x^2\cos x\,dx=\int x^2(\sin x)'\,dx$$
$$=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx$$
$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C_4$$

となる。ただしC_3, C_4は積分定数とする。

(答) $\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_3$

$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C_4$

(4)

曲線C_1, C_2の方程式をそれぞれ，

$y_1=\sin x_1$ $\left(0\leqq x_1\leqq\frac{\pi}{4}\right)$

$y_2=\cos x_2$ $\left(0\leqq x_2\leqq\frac{\pi}{4}\right)$

とすると，求める立体の体積Vは，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x_1^2\,dy_1+\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x_2^2\,dy_2$$

となる。$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x_1^2\,dy_1$について，$y_1=\sin x_1$であるから，

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\cos x_1$$

であり，y_1とx_1は次のように対応する。

y_1	0	$\to$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
x_1	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

以上より，

$$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x_1^2\,dy_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x_1^2\frac{dy_1}{dx_1}\,dx_1$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos x\,dx$$
$$=\pi\left[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2-\sqrt{2}\pi$$

となる。同様に，$\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x_2^2\,dy_2$について，$y_2=\cos x_2$であるから，

$$\frac{dy_2}{dx_2}=-\sin x_2$$

であり，y_2とx_2は次のように対応する。

y_2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\to$	1
x_2	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	0

以上より，

$$\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x_2^2\,dy_2=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^0 x_2^2\frac{dy_2}{dx_2}\,dx_2$$
$$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^0\left(-x^2\sin x\right)dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx$$
$$=\pi\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2+\sqrt{2}\pi-2\pi$$

となる。よって，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\,dy+\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x^2\,dy$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2-\sqrt{2}\pi\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^3+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2+\sqrt{2}\pi-2\pi\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2-2\pi$$

と求められる。

(答) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2-2\pi$